

二相流模式研究自由液面流在不規則底床運行之現象

鄧志浩* 鄭雅允

中原大學土木系
中壢市普仁 22 號

(Received: June 26, 2003; Accepted: November 10, 2003)

摘要

本文利用二相流(two-phase flows)模式探討明渠水流在不規則底床運行之現象，模式之建立是採用最小平方有限元素法(Least-Squares Finite Element Method)求解Navier-Stokers方程式。自由液面與空氣接觸之處理是考慮流體體積法(VOF)並配以一連續函數(在此稱為color function)來計算液面變化，本文利用固定網格求解不同結構渠道模擬明渠流之自由液面現象，對於不規則底床模擬之結果與前人實驗之研究極為吻合。最後，本研究探討自由湧流撞擊固體結構物以不同高度、不同距離，探討自由表面流場與壓力的分佈及變化。

關鍵詞：明渠流，二相流，最小平方有限元素法。

壹、前言

在自然界中存在許多具自由液面之流場，例如：河川之水流、海水之波浪、湖泊之水面等等。而在水利工程上，自由液面的例子諸如明渠流裡的水面的急遽的變化，水體流經水工結構物（如橋墩、溢洪道、堰、壩、堤防、閘門等等）的流場，水庫的波動，港灣的振動波等等皆是，因此藉由充分瞭解自由液面進而達到控制流場目的是本文的研究主題。

明渠流中的具自由液面流場，常呈現紊流及水與空氣交雜的複雜現象，因其邊界為一移動邊界，而流場範圍或形狀隨著時間不斷變化，故在數值模擬計算上係相當難處理的。自由液面流動問題，最早的計算方式是以有限差分法為基礎，Harlow & Welch^[1]以標記質粒子的有無來捕捉邊界，稱之MAC(Marker And Cell)法，雖精確但對於複雜邊界無法捕捉穩定流況更無法運作三維的大量計算。Hirt & Nichols^[2]所提出之流體體積法(Volume Of Fluid; VOF)由流體體積之輸送判斷液面位置，計算

時配合完整速度場與速度邊界條件，即可計算出流體體積在空間中分布情況，則自由液面之位置可被決定，流體體積法可應用於存在不同相位流體接觸界面之流場，且對碎波亦具處理能力。而最小平方有限元素法(least-squares finite element method, LSFEM)在處理空氣與液體的二相流接觸面上，是將密度視為一連續函數(在此稱之color function)的變化；Color function將液體與空氣界面間的變化視為一漸變關係，而非為常數關係，將氣-液二介面條件以動量方程式處理；而不需給定二介面的條件，在使用上簡單了許多。

1970年代初期，Bramble and Schatz^[3]是最早使用最小平方有限元素法。由於Lynn and Arya^[4]把二階偏微分方程導入新變數而使原本的二階變為一階偏微分方程，使得求解變得更加簡便，Jiang^[5]等引進共軛梯度法(Conjugate Gradient Method)的使用更加速運算速度及減少內存，改善有限元素的缺點。Tang and Tsang^[6]進一步提出時間步推(Time-marching)和時間精確(Time-accurate)最小平方有限元素法；時間步推法在時間上使用向後尤拉法成功的取代非線性項；時間精確法是在時間上使用Crank-Nicolson法並使用牛頓線性法線

* 通聯作者：鄧志浩 E-mail: jyhhaw@cycu.edu.tw

性化求解。

Wu^[7]等；以最小平方有限元素法(LSFEM)模擬二相流數值演算引入以 Hirt and Nichols^[2]所提出之流體體積法(VOF)為基礎配以連續表面張力法(continuum surface force method; CSF)，CSF是由 Brackbill^[8]等所提出最後經 Jacqmin^[9]改良；此部份的數值演算是利用 color function 在VOF法裡以一有限厚度漸變層取代原始形狀階梯(step)函數，所有的物理特性如密度和黏滯性假設為一連續的線性函數 color function 平滑地橫越假設厚度的自由表面漸變層。近來也有許多學者以流體體積法(VOF)為基礎配以 CSF 模式擬由空氣與水構成的二相流問題如 Sussman^[10]等改良等位函數法(Level Set Method)模擬不可壓縮氣泡與水滴二相流的變化情形。

最小平方有限元素法(LSFEM)是利用一個簡單、統一的數值計算公式，便可以有效地求解各種類型的偏微分方程，在求解不可壓縮流場以描述自由液面運動時，係直接求解代表守恆定律的一階偏微分方程組，並且導出的線性代數方程組總是對稱正定的，以較少的內存、較短的時間算出解答，計算變得容易，且不需要專門的計算技術，也避免了傳統方法需要使用者調整參數的缺陷，無需特殊處理，就能捕獲自由液面在不規則底床的運動現象。

貳、目的

本文以最小平方有限元素法(LSFEM)模擬不規則渠底床驗證具自由液面明渠流中的水面變化及以具跌落結構的矩形溝渠池模擬明渠流動中不易觀察得到的震盪現象等，並利用實驗資料來驗證數值模擬結果之正確性。經由此模式驗證最小平方有限元素法對具自由液面問題的模擬，進而應用最小平方有限元素法模擬一均勻入流水體湧撞於渠底障礙物對不同的長寬高比值觀察其自由液面流場之複雜變化。

參、最小平方有限元素法應用於 Navier-Stokes Equation

最小平方有限元素法(LSFEM)在求解水與空氣二相流體問題時，假設留體及氣體皆為不可壓縮流體，則連續方程式與NSE表示如下：

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \bar{u}) \bar{u} \right] + \nabla p + \mu (\nabla \times \bar{u}) - \mu \left(\nabla \cdot [(\nabla \bar{u}) + (\nabla \bar{u})^T] \right) = \rho \bar{g} \quad (2)$$

(1)，(2)式中考慮二維流場， x ， y ， t 為自變數， $\bar{u} = u\bar{i} + v\bar{j}$ ，其中 u 為水平方向速度、 v 為垂直方向速度、 p 為壓力項、 \bar{w} 為旋度、 ρ 為密度。在二維流場中 $\bar{w} = \omega\bar{k}$ ，其中

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

利用特徵長度 L 、特徵速度 $\bar{v} = \sqrt{gL}$ ，參考密度 ρ_0 及參考壓力 $\bar{p} = \rho_0 \bar{v}^2$ ，則(1)及(2)式可以利用下列無因次形式：

$$x^* = x/L, y^* = y/L, u^* = u/\bar{v}, v^* = v/\bar{v},$$

$$t^* = t/(L/\bar{v}), \rho^* = \rho/\rho_0, p^* = p/\rho_0 \bar{v}^2$$

再將此無因次式去掉*號並以最小平方有限元素法的一階標準型式來表示：

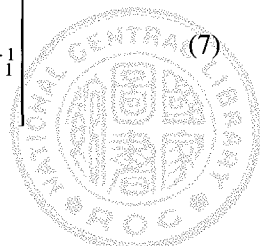
$$A_0 U + A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} = f \quad (4)$$

其中對於時間項的處理是採用前向有限差分方式，則(4)式中各無因次項可以表示如下：

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \omega \end{bmatrix}_k^{n+1} \quad (5)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{k-1}^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial u_{k-1}^n}{\partial x} \right) & \rho_{k-1}^{n+1} \frac{\partial u_{k-1}^n}{\partial y} & 0 & 0 \\ \rho_{k-1}^{n+1} \frac{\partial v_{k-1}^n}{\partial x} & \rho_{k-1}^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial v_{k-1}^n}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{k-1}^{n+1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_{k-1}^{n+1} u_{k-1}^n & 0 & -\mu_{k-1}^{n+1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$



$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho_{k-1}^{n+1} v_{k-1}^n & 0 & 0 & \mu_{k-1}^{n+1} \\ 0 & \rho_{k-1}^n v_{k-1}^n & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \frac{u_{k-1}^n}{\Delta t} - \rho g \\ \rho \frac{v_{k-1}^n}{\Delta t} - \rho g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{k-1}^{n+1} \left\{ u_{k-1}^n \frac{\partial u_{k-1}^n}{\partial x} + v_{k-1}^n \frac{\partial u_{k-1}^n}{\partial y} \right\} \\ -2 \frac{\partial u_{k-1}^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \mu_{k-1}^{n+1}}{\partial x} - \left(\frac{\partial v_{k-1}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{k-1}^{n+1}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mu_{k-1}^{n+1}}{\partial y} \right) \\ \rho_{k-1}^{n+1} \left\{ u_{k-1}^n \frac{\partial v_{k-1}^n}{\partial x} + v_{k-1}^n \frac{\partial v_{k-1}^n}{\partial y} \right\} \\ -2 \frac{\partial v_{k-1}^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial \mu_{k-1}^{n+1}}{\partial y} - \left(\frac{\partial v_{k-1}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{k-1}^{n+1}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mu_{k-1}^{n+1}}{\partial x} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

上列各式(n)項與(n+1)項分別代表前項時間和目前時間，及式中之(k)與(k-1)項分別代表目前迭代與前次迭代的標註。

由(5)式中，我們能分別求出水平方向速度 u 、垂直方向速度 v 、壓力 p 及旋度 ω 。

另外在空氣與水的黏滯係數 μ 與密度 ρ 的變化是以一連續函數 color function 針對空氣與水兩流體間的密度和黏滯係數另外處理，如下式所示：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) C = 0 \quad (10)$$

在此利用一個函數分佈表示液體（水）與氣體（空氣）間的密度及黏滯係數分佈，如下所示：

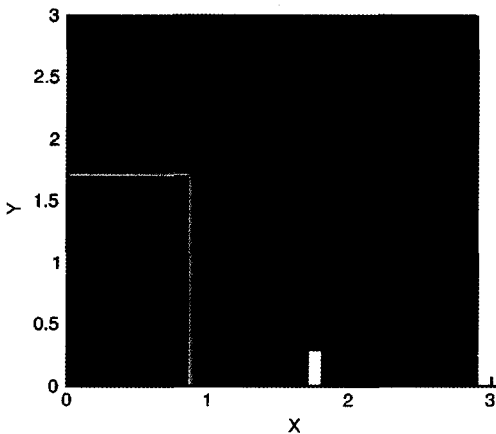


圖 1 潰壩模擬之初始分布圖

$$\rho = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{C_2 - C_1} (C - C_1) \quad (11)$$

$$\mu = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{C_2 - C_1} (C - C_1) \quad (12)$$

上式中註標 2 代表液體而註標 1 代表氣體，一般將液體之 C_2 值設為 1 而將氣體之 C_1 值設為 0。將式(10)經向後尤拉法整理並利用牛頓法迭代之可得：

$$\frac{C_k^{n+1}}{\Delta t} + (\bar{u}_k^{n+1} \cdot \nabla) C_k^{n+1} = \frac{C_{k-1}^n}{\Delta t} \quad (13)$$

即可求得黏滯係數 μ 與密度 ρ 。

肆、驗證與應用

二相流之自由液面流體在過去處理上，有相當多的方式其中最主要的可分為兩大類：(1)固定格網法與(2)非固定格網法，本文以第一類固定網格模式，配與VOF法基礎處理水與空氣界面的問題，因水面的變化相當劇烈，故本文忽略不計自由液面之表面張力。而後處理部分配合 TECPLOT 繪圖軟體之動態展示功能，利用二維動畫展示含自由液面之非定常流動現象。

一、具障礙物之潰壩流場驗證

潰壩後之流體運行經障礙物是非常實際的問題。Koshizuka^[11]曾以實驗探討此現象，其中啓始靜止壩體的尺寸高寬比為 2 比 1，整個實驗流場寬至少為啓始壩體寬之 4 倍。本研究首先利用此問題加以驗證模擬具障礙物之潰壩流場。計算域的大小皆以無因次尺寸表示，其中整個範圍以 2.9×3 表示，而啓始靜止壩體為寬 0.85 高 1.7 且距離阻礙物（尺寸為 0.1×0.3）為 0.85，如圖(1)所示。採用高度為 3 單位主要的目的是希望此邊界不要影響到計算之結果。整個模式以 $\Delta x = \Delta y = 0.05$ 之均勻格網建構，固定計算時距為 10.5 單位，起始水柱(0.85×1.7)與障礙物外形（高寬比=3），模式的邊界條件設立為滑動邊界(free slip)，並與Koshizuka^[11]實驗資料圖2(a)、3(a)作比較。計算結果如圖2(b)、3(b)所示，證明本模式對具自由液面高度與自由液面位置間存在非單值關係的流場可模擬良好。由圖4(a)~4(d)各個不同

時間點之水面變化；且各圖之壓力變化隨時間增加而趨使流體快速向邊移動且流體在越靠近底部速度越大，當液面線快速的向右邊障礙物靠近時，壓力梯度線也隨之越密集的靠近障礙物，在圖中可比較出在靠近障礙物的牆角是發生最大壓力處。

二、不規則底床渠道具自由液面之驗證

VAW^[12]以具有簡單的不規則矩形底床渠道結構模擬瑞士 Saltina 河之不規則底床實驗。Sulzer^[13]等利用具紊流 $k-\epsilon$ 之 Inverse mode 經由表面速度和水深的非併入量測組合定義流出量(discharge)。其計算方式是首先假設自由液面的方式然後在不斷地調整自由液面之位置來描述。並使用 FEM-Tool box 套裝軟體模擬的洪流量，結果在不受量測次數的影響估計其準確度約 2% 左右；水深對估計誤差的影響較小，其最主要的誤差來源是洪流表面速度量測誤差，但作者認為可以增加量測點的數目來減少誤差。

本文研究上述具自由液面之不規則底床模式是

以 48781 個節點(nodes)與 48200 個元素(elements)所構建而成，其中格網間距為均勻格網之 $\Delta x = \Delta y = 0.002$ ，固定計算時距 $= 0.1$ 單位。邊界條件的設置是底床為非滑動邊界(non slip)，右側出口假設此為一無限遠邊界採不給定邊界條件，自左側保持水平方向的均勻流入，速度給定為 0.75 單位，此速度在任何時段均維持不變，且其壓力分佈一般呈靜水壓力。模擬結果可由圖 5 所示；自由液面水面流線在不規則底床渠道之變化形態，圖 6 是本文模擬結果與 VAW^[12]之實驗結果及 Sulzer^[13]等之數值模擬結果相較水面的變化情形，自圖中可看出本文以最小平方有限元素法(LSFEM)模擬的自由液面與實驗結果相當吻合。本數值模擬的結果與實驗量測在流經塊狀凸出處較 Sulzer 所得的結果差異來的明顯；而在遠離此塊狀凸出處則本數值模擬的結果是較佳的。基本上 Sulzer 的模擬是採用紊流模式模擬此流場之流況，故對於塊狀凸出處具有明顯能量消散的地方其較能有效的加以計算；而在遠離塊狀凸出處，能量消散並不是特別明顯故本模式可以有效的模擬。



(a)



(b)



(a)



(b)

圖 2 (a) (from Koshizuka et al. 1995) ; (b) 潰壩後水體撞擊結構物模擬分布圖

圖 3 (a) (from Koshizuka et al. 1995) ; (b) 潰壩後水體撞擊結構物模擬分布圖



三、矩形溝渠內自由液面之震盪驗證

本計算主要是以 Fujita 及 Maruyama^[14]之實驗為模擬對象。Fujita 及 Maruyama^[14]以實驗模型長 7.5m、寬 0.3m 之明渠水道，在相同水利狀態下溝渠長(L)在 0 到 11.0 的變化範圍測試展弦比(trench aspect ratio) γ 的影響，展弦比 γ 的定義是 L/dz ；其中 dz 是上下游的高程差，Fujita 及 Maruyama 應用精密光學量測儀器 PTV 質點追跡測速儀和 PIV 質點影像測速儀系統作為流場量測工具，量測二維流場於空間上垂直剖面之速度分佈的變化情形。

本文為計算方便，將實驗條件經無因次化並將

原來實驗尺寸以一無因次單位表示 2cm，計算範圍如圖 7 所示。幾何形狀縮小比例進行驗證模擬，以模擬一均勻流進入所計算之流場後，在下游設置一有落差結構之溝渠，使上游渠道水流跌落到連接的溝渠結構物中後順流至下游；觀察在不同比例的展



圖 5 LSFEM 模擬之洪流自由水面流線

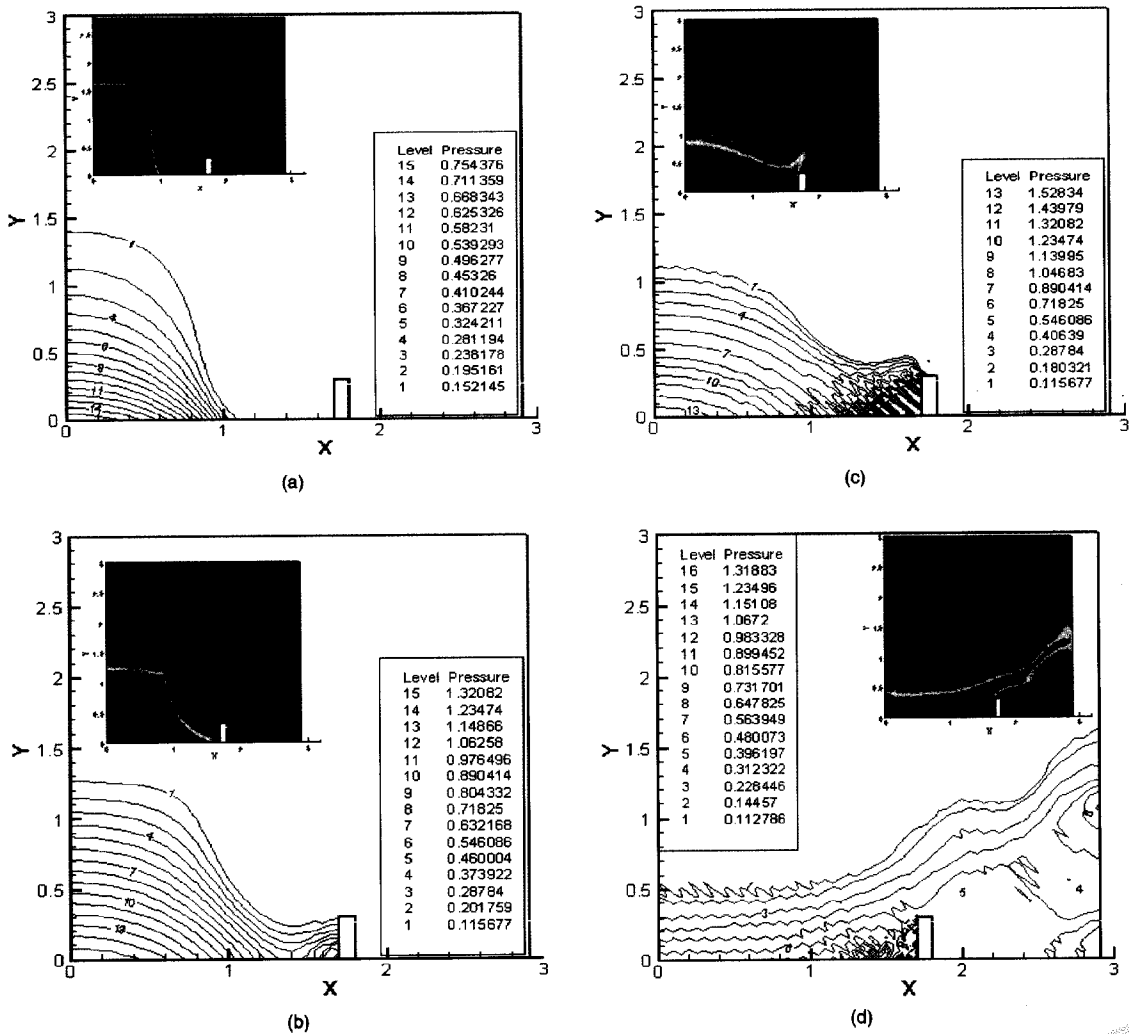


圖 4 (a) $t=0.5$ 之壓力場及自由液面流場；(b) $t=1.0$ 之壓力場與自由液面流場；(c) $t=1.5$ 之壓力場與自由液面流場；(d) $t=3.5$ 之壓力場與自由液面流場



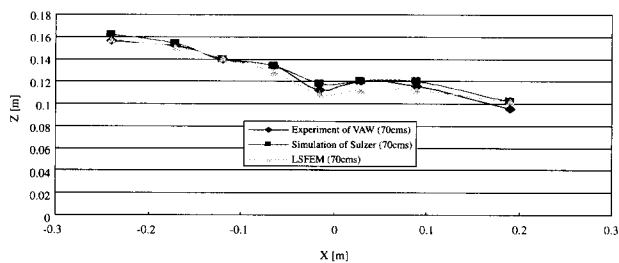


圖 6 流量為70cms模擬結果與實驗的自由水面比較圖

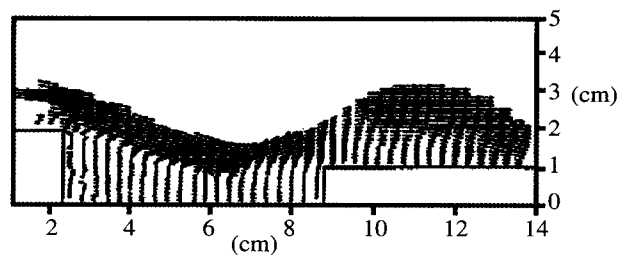


圖 11 $\gamma=6.5$ (from Fujita et al. 2002) $t=6/6$ 秒

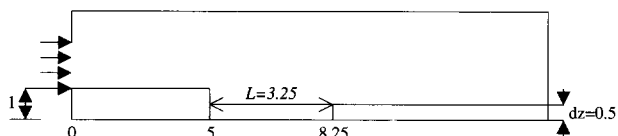


圖 7 矩形溝渠數值模擬之無因次示意圖 (1 單位 = 2cm)

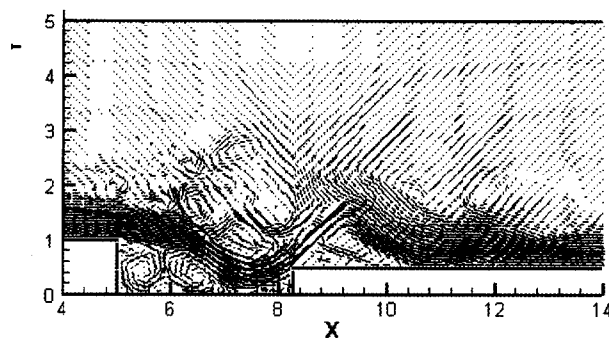


圖 12 數值模擬結果 $\gamma=6.5$ $t=0/6$ 秒

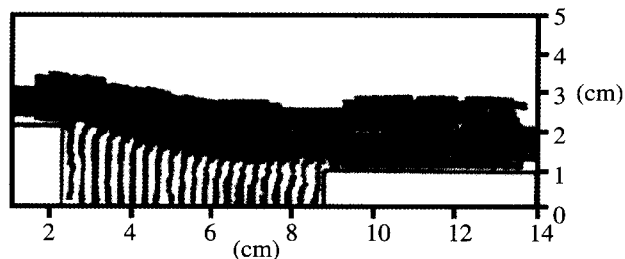


圖 8 $\gamma=6.5$ (from Fujita et al. 2002) $t=0/6$ 秒

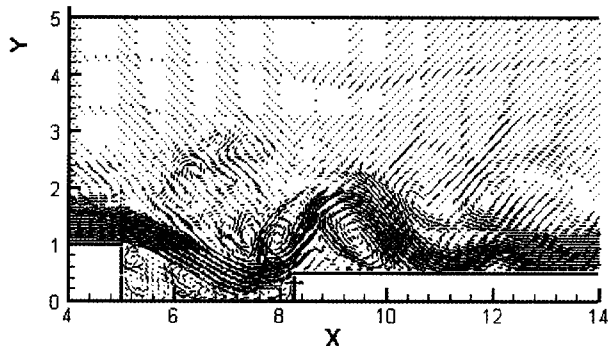


圖 13 數值模擬結果 $\gamma=6.5$ $t=3/6$ 秒

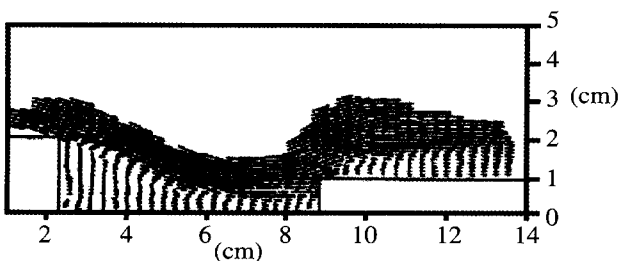


圖 9 $\gamma=6.5$ (Fujita et al. 2002) $t=3/6$ 秒

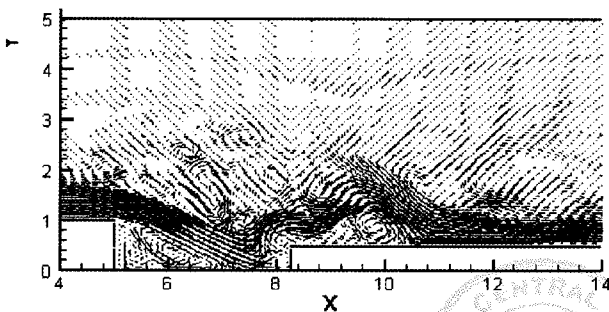


圖 14 數值模擬結果 $\gamma=6.5$ $t=5/6$ 秒

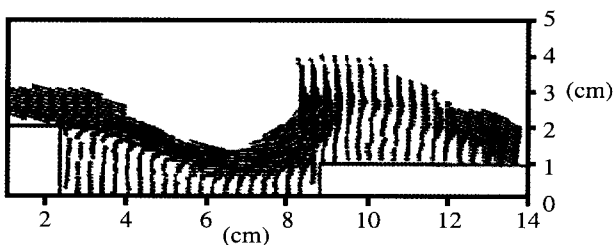
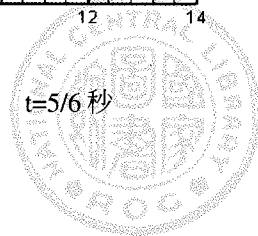


圖 10 $\gamma=6.5$ (from Fujita et al. 2002) $t=5/6$ 秒



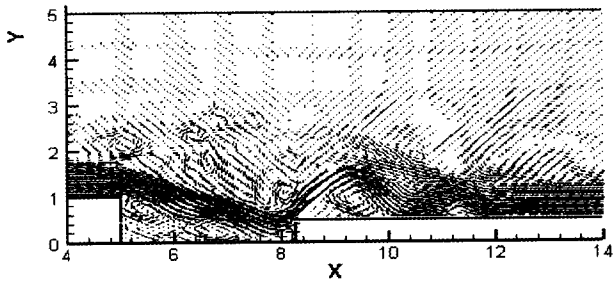


圖 15 數值模擬結果 $\gamma=6.5$ $t=6/6$ 秒

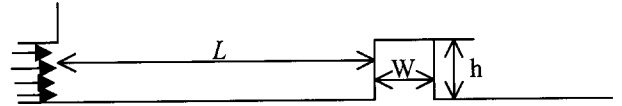


圖 16 均勻湧流撞擊阻礙物之長、寬、高無因次示意圖

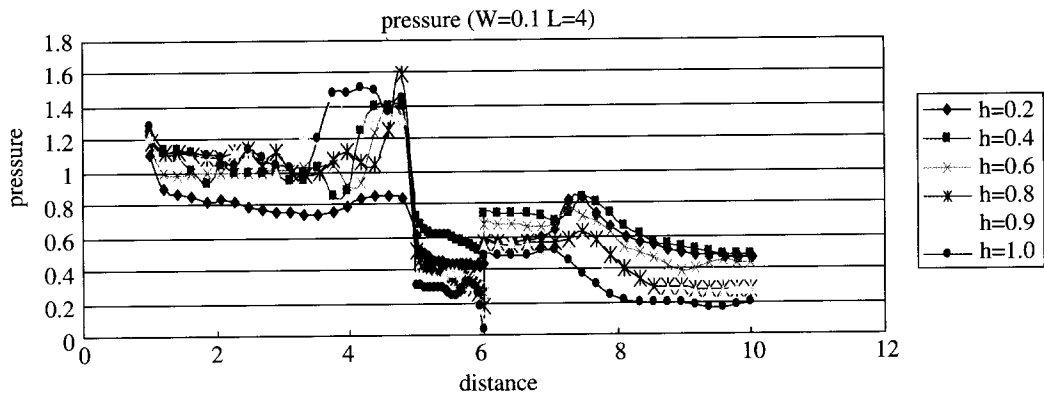


圖 17 固定寬度 $W=1.0$ 與長度 $L=4$ 對於不同高度 h 的壓力比值

弦比的流體變化情形。在此提出 $\gamma=6.5$ 經無因次化後與 Fujita 及 Maruyama^[14] 之實驗結果進行比對。圖 8~11 為實驗結果；圖 12~15 為本文模擬結果對應於圖 8~11 可以比較相同時間之結果。Fujita 及 Maruyama^[14] 實驗結果的震盪週期約為 1.5 秒；而本文模擬之震盪週期經換算後約為 1.4 秒，差異並不大；且經由實驗結果知震盪現象的發生與下游是否存在水躍現象無關而是與特定比例的溝渠展弦比 γ 有關。根據實驗研究展弦比在 $6.5 < \gamma < 9.0$ 之間會有震盪現象產生，此種震盪現象經本模式的驗證亦有相同的結果。可知本文模式以最小平方有限元素法 (LSFEM) 對於震盪現象問題在自由液面之激烈變化可以有效加以模擬。

四、均勻流湧撞模擬

經由上述不同之不規則底床的模擬驗證發現本二相流模式對不規則底床渠道可得到良好模擬，最後應用本模式模擬水體均勻流入撞擊具不同長 (L)、

寬 (W)、高 (h) 比例的地面障礙物渠道，示意如圖 16。分析水體在相同流速為 1 單位下流經不同距離長寬比的例阻礙物時，觀測其水流特性的變化，在此本文提出長 $L=4$ 、寬 $W=0.1$ 與 1.0 及高 $h=0.2\sim 1.0$ 的案例比較，圖 17 為模擬結果為距離長 (L) 與相同障礙物寬 ($W=1.0$) 在比較在不同高度時底床的壓力變化，由圖中可觀察到在障礙物上游之壓力變化是隨著高度增加而增加；直到上游障礙物銳角處壓力下降並出現壓力與高度呈負相關的情形，在水體越過障礙物後之跌落現象可自圖中觀察出隨高度的增加水體跌落的距離越短；即障礙物下游壓力突增處為水體跌落壓力最大之。在圖 18(a)~18(f) 所示為距離長 (L) 與相同障礙物寬 ($W=1.0$) 在不同高度的自由液面流場。

圖 19 為模擬結果為距離長 (L) 與相同障礙物寬 ($W=0.1$) 在比較在不同高度時底床的壓力變化。在圖 20(a)~20(f) 所示為距離長 (L) 與相同障礙物寬 ($W=0.1$) 在不同高度的自由液面流場。由圖中可看到不同高度障礙物其最大波高形狀且經研究發現此時也幾乎

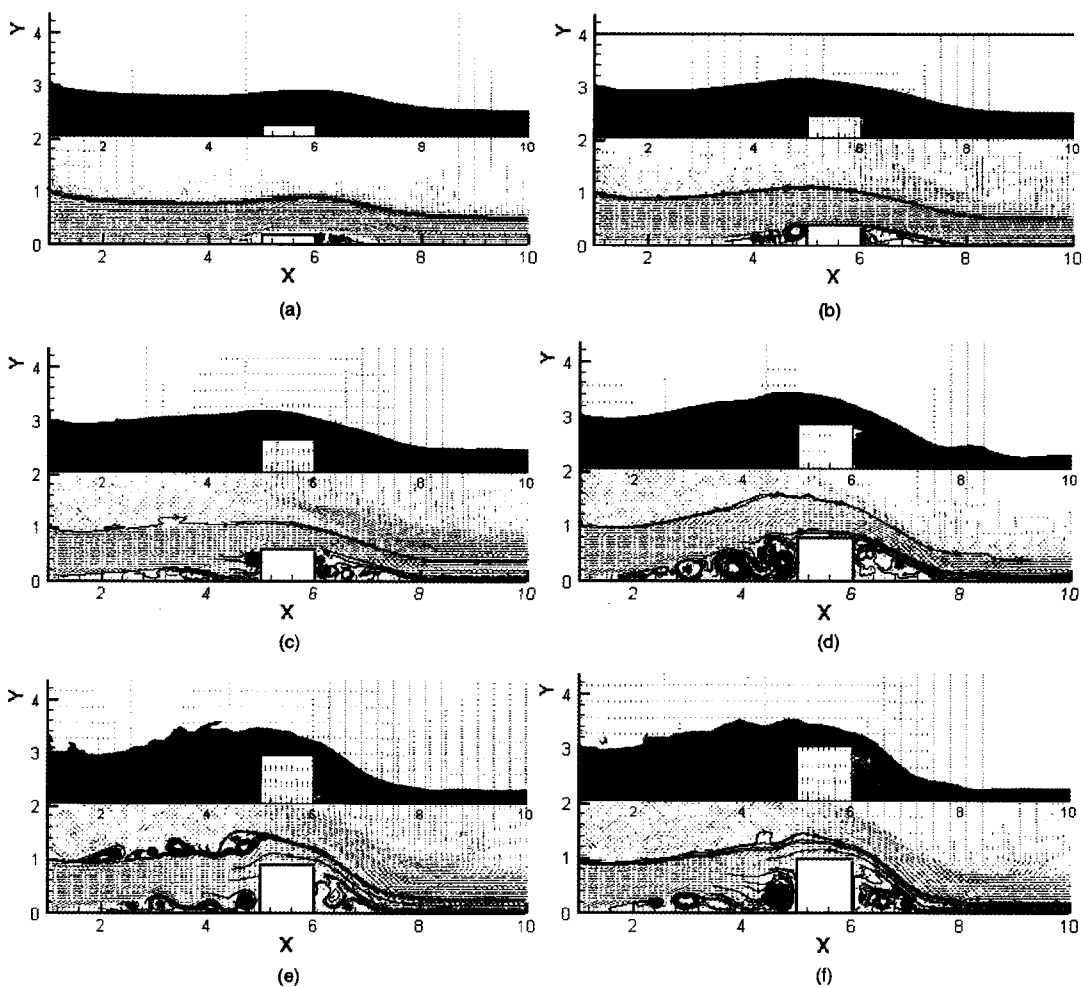


圖 18 (a) $h=0.2$ 之自由液面流場與速度場；(b) $h=0.4$ 之自由液面流場與速度場；(c) $h=0.6$ 之自由液面流場與速度場；(d) $h=0.8$ 之自由液面流場與速度場；(e) $h=0.9$ 之自由液面流場與速度場；(f) $h=1.0$ 之自由液面流場與速度場

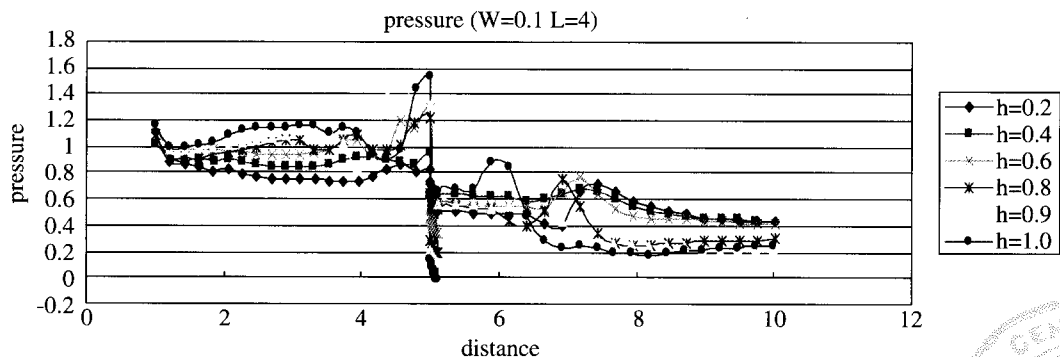


圖 19 固定寬度 $W=0.1$ 與長度 $L=4$ 對於不同高度 h 的壓力比值



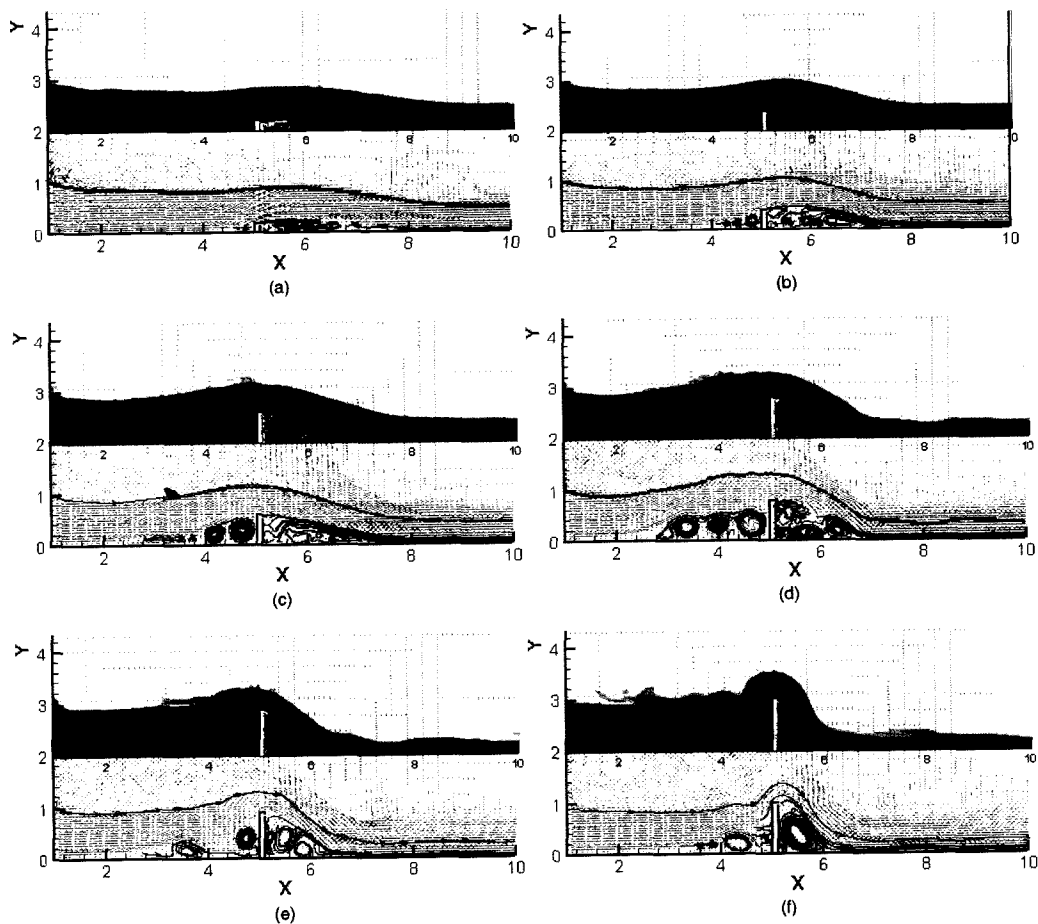


圖 20 (a) $h=0.2$ 之自由液面流場與速度場；(b) $h=0.4$ 之自由液面流場與速度場；(c) $h=0.6$ 之自由液面流場與速度場；(d) $h=0.8$ 之自由液面流場與速度場；(e) $h=0.9$ 之自由液面流場與速度場；(f) $h=1.0$ 之自由液面流場與速度場

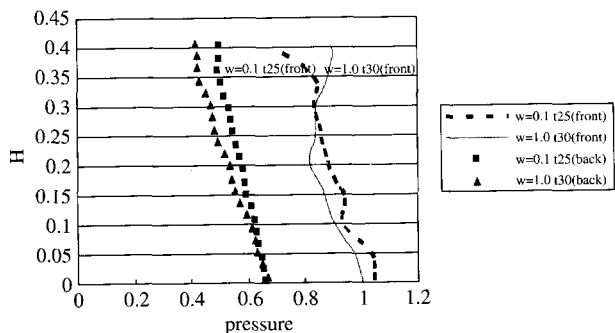


圖 21 $L=4$ ， $h=0.4$ 對於不同 W (寬度) 之障礙物上下游牆面之壓力比較

是障礙物上游牆面發生最大壓力的時間；不同寬度時間亦不同， $W=1.0$ 的平均最大壓力時間在 $t=30$ 個

單位左右；而 $W=0.1$ 的最大壓力時間在 $t=25$ 左右，且由圖中可看出較小的寬度 ($W=0.1$) 對水面變化造成的影響較 $W=1$ 的大。同時阻礙物愈高其對自由液面之影響越明顯並且會產生較強的回水現象使的水面越不穩定。

最後經由圖 21 對不同寬度 (W) 的障礙物上下游兩側牆面的壓力大小作比較，自圖中可知寬度較小的受湧撞壓較大；經模擬結果知在障礙物上游牆面之壓力隨距離長 (L) 的增加而呈現倍數增加，而且在高度 (h) 為 0.6 時寬度不同的障礙物 ($W=0.1$ 與 $W=1.0$)，障礙物上游牆面壓力是相同的狀態，障礙物高 (h) 在大於 0.6 後兩不同寬度上游牆之壓力比值與之相反。

伍、結論

最小平方有限元素法(LSFEM)在空氣與水體交雜之二相流體密度及黏度之界面急遽的變化情況以一連續函數 color function 來處理。而在求解NSE時；矩陣的正定與共軛梯度法的有效利用減少了壓力與速度場間的疊代程序，提昇了數值計算效率。且固定網格使用，使界面條件融入了方程式，在程序的設計上也較為簡單。由模擬結果顯示出最小平方有限元素法(LSFEM)具處理二相流複雜流場能力的各項優越性。

參考文獻

1. Harlow, F. H. and Welch, J. E., "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free-surface", *Phys. Fluids*, vol. 8, pp 2182-2189, (1965).
2. Hirt, C. W. and Nichols, B. D., "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", *J. Comput. Phys.*, vol. 39, pp 201-225, (1981).
3. Bramble, J.H. and Shatz, A.H., "On the numerical solution of elliptic boundary-value problems by least-squares approximation of the data", in B. Hubbard (ed). *Numerical Solution of P.D.E.*, vol. 2, Academic press. New York, pp 107-133, (1970).
4. Lynn, P.P. and Alani, K., "Use of the least square criterion in finite element formulation", *Int J. Num. Meth. Eng.*, vol. 6, pp75-88, (1974).
5. Jiang, B.N. and Sonnad, V., "Least-squares solution of incompressible Navier-stokes equations with the p-version of finite elements", ASA.TN-105203, Sept. (1991).
6. Tang, L.Q. & Tsang, T.T.H., "A least-squares finite element method for time-dependent incompressible flow with thermal convection", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 17, pp271-289 (1993).
7. Wu, J., Yu, S. T. and Jiang, B.N. "Simulation of two-fluid flows by the least-squares finite element method using a continuum surface tension model", *Int. J. Num. Meth. Engineering*, vol. 42, pp583-600(1998).
8. Brackbill, J. U., Kothe, D. B. and Zemach, C., "A continuum method for modeling surface tension", *J. Comput. Phys.* vol. 100, pp335-354 (1992).
9. Jacqmin, D., "Three-dimensional computations of droplet collisions, coalescence and droplet/wall interactions using a continuum surface-tension method "A continuum method for modeling surface tension", *AIAA paper No. 950883*, (1995).
10. Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. and Osher, S., "An improved level set method for incompressible two-phase flows", *Comput. Fluids*, vol. 27, pp663-680 (1998).
11. Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y., "A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation". *Comp. fluid Dyna. J.*, vol. 4, pp 29-46 (1995).
12. VAW "Abflussmessstation der Saltins bei Brig", *Versuchsanstalt fur Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, Zurich, Switzerland. Rep. No. 4081.* (1994)
13. Sulzer, S., Rutschmann, P. and Hinzlbach W., "Flood discharge prediction using Two-Dimensional inverse modeling". *Journal of hydraulic engineering ASCE*, vol. 128, No. 1 pp46-54 (2002).
14. Fujita, I. and Maruyama, T., "Hydraulic characteristics of open channel flow downstream of a drop structure with a trench". *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, vol. 20, No. 1 pp103-111(2002).

Simulation of Free Surface Flows on An Uneven Bottom by A Two-phase Flow Model

JYH-HAW TANG AND YA-YUN CHENG

*Department of Civil Engineering
Chung Yuan Christian University
Chung-Li 32023, Taiwan, R.O.C.*

ABSTRACT

The free surface flow propagates in an uneven bed has been simulated by a two-phase flow model. The least-squares finite element method is adopted to solve the Navier-Stokes equation for establishing the model. A VOF scheme associated with a continuous function, color function, is considered for the treatment of the interface between liquid and gas. A fixed mesh domain is designed for the simulation of various flow problems. The simulation results are in good agreement with the experimental measurements. For the free surge propagates on a solid block with different sizes and heights, the free surface variation and pressure distribution are carefully investigated in this study.

Key words: *Open channel flow, two-phase flow, least-squares finite element method.*

