

教育科學研究期刊 第六十卷第一期
2015 年, 60 (1), 33-72
doi:10.6209/JORIES.2015.60(1).02



臺灣、美國與新加坡國中階段 幾何教材內容之分析比較

楊德清

國立嘉義大學
數理教育研究所

鄭婷芸

嘉義市立北興國民中學

摘要

本研究採內容分析法以比較臺灣「康軒數學」、美國「連結數學」與新加坡「新課程數學」在國中階段幾何教材總題數、佈題方式與表徵型態，以及幾何內容特色之差異。結果顯示：三套教科書在幾何教材總題數具顯著差異性，美國「連結數學」之幾何總題數顯著多於臺灣「康軒數學」與新加坡「新課程數學」。三套教科書在佈題方式亦有差異；美國「連結數學」有將近三分之一的問題屬開放型問題，但是「康軒數學」與「新課程數學」兩套教材之幾何題目安排高達九成五以上皆為封閉型問題。三套教材在表徵型態方面，以「聯合型態問題」與「文字型態問題」部分所占比例最高，約有七至八成以上。研究亦發現，三套教材在幾何主題內容有部分差異，且三套教材亦各有其特色。最後，期望本研究之發現，可提供未來數學教科書設計之參考。

關鍵字：國中階段、連結數學、幾何、新課程數學

通訊作者：楊德清，E-mail: dcyang@mail.ncyu.edu.tw

收稿日期：2013/12/05；修正日期：2014/03/27、2014/07/16；接受日期：2014/11/22。

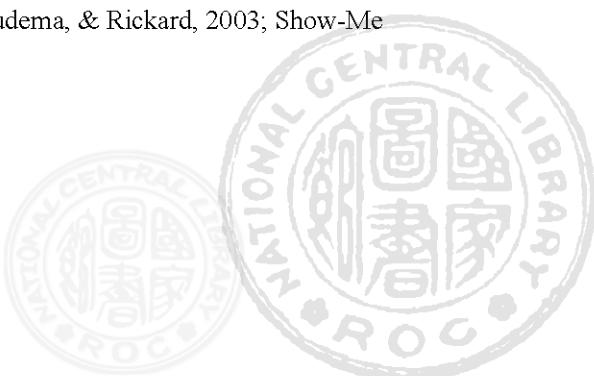


壹、前言

Tarr、Reys、Barker 與 Billstein (2006) 認為教科書是教學素材的權威，教學活動的核心，應該教什麼以及如何去教，幾乎完全取決於教科書。而教科書在數學教與學之過程中所扮演的角色於近年來更是獲得許多國際數學教育家的關注與研究 (Tarr et al., 2008; Yang, Reys, & Wu, 2010; Zhu & Fan, 2006)。許多國內、外相關的研究亦顯示，中小學教師的教學內容和活動設計大多依據教科書以及教學指引 (Herbel-Eisenmann, 2007; Kim, 2007; Stein, Remillard, & Smith, 2007)。由此可知，教科書的重要性。

長久以來，幾何教材在學校課程中即占有一席之地，Clements 與 Battista (1992) 指出，幾何提供闡釋與反映外在物理環境的方法，並可作為學習其他學科素材的工具。尤其幾何的學習更能加強空間思考與提升高層次的創造思考能力；幾何的學習除了可以使學生獲得形方面之相關知識外，還可以加強學生對於空間的思考，並能進一步有條理地描述生活周遭的世界 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)。另一方面，幾何的學習可同時培養學生邏輯思考與推理能力，從而提升問題解決能力 (左台益、梁勇能, 2001；Burger & Shaughnessy, 1986)。美國數學教師學會 (NCTM, 2000) 在「學校數學原則與標準」設立四個目標來貫穿每個學習階段的幾何內容。教育部在九年一貫數學學習領域課程綱要中更將幾何列為五大主題之一，並指出人是依賴視覺的生物，而幾何多半是利用圖形來呈現，對應到其他需要比較多抽象思維的單元，學生能夠有較多的具體物來解決問題。有鑑於幾何課程在數學教育的重要性，因此，本研究針對國內及他國之幾何課程進行深入的探討與分析。

新加坡學生在國際數學與科學成就表現 (Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS) (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012) 和國際數學素養研究 (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2010) 皆有相當優異的表現；其中，「新課程數學」(New Syllabus Mathematics, NSM) 是目前新加坡中學使用率最高 (80%) 的版本 (SGBox, 2009)。另一方面，臺灣中、小學自從教科書開放後，目前數學教科書主要以三家出版社呈現三足鼎立的局面，其中康軒之市占率約為 38.59% (廖雅玉, 2010)。美國數學教育研究長期以來領導世界數學教育之趨勢，而國內數學教育改革亦與美國的數學教育具有高度相關性。最新 TIMSS 2011 (Mullis et al., 2012) 數學成就評量結果顯示，美國四年級與八年級之數學成就表現大幅度成長，此顯示美國近 20 年之數學課程改革對美國中、小學數學教育產生正面效益。同時，美國「連結數學」(Connected Mathematics Program, CMP) 為美國國家科學發展協會 (National Science Foundation, NSF) 為改進美國數學教育所贊助研發之教材；且 CMP 是美國市面上四套國中數學教科書中使用率最高者 (Cai et al., 2013; Rivette, Grant, Ludema, & Rickard, 2003; Show-Me Center, 2002)。

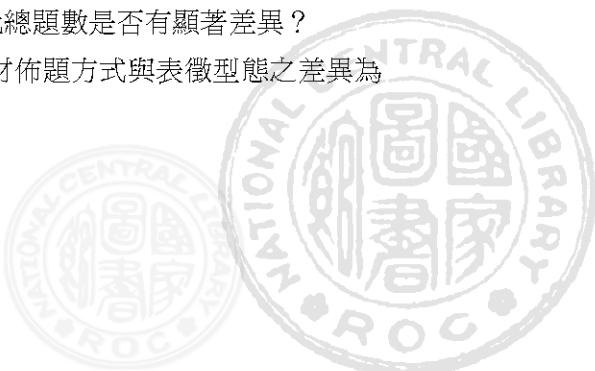


此外，本研究選取 CMP 的重要原因之一是它符應美國 NCTM 課程綱要所發展之標準課程 (standard-based)，CMP 課程被認為較能夠幫助學生概念化的學習，並在開放式問題有更好的呈現，被美國數學界視為較具影響力的中學教科書 (Cain, 2002; Fan & Zhu, 2007)。同時，CMP 之特色是整個課程的發展立基於數學教育研究與理論，例如，以社會建構理論、多重表徵、合作學習與強調推理等相關研究發現為依據 (Connected Mathematics Program [CMP], 2009)。而此課程（幾何部分亦同）強調以問題為中心，注重基本概念的學習，並重視基本概念與相關概念的連結。NSM 教材（幾何課程部分亦同）之特色是重視連結、問題解決與數學教學的整合，此外也強調基本概念，更重要的是使用此版本的學生，證實在 TIMSS 1995-2003 獲得優異的表現 (張守波, 2011)，因此該教科書在新加坡具重要之影響力。臺灣的康軒版教科書，注重數學與生活連結，並強調培養學生的創新能力 (謝佩珍, 2009)，其具體目標是引導學生動手做數學，培養數學思考、數學溝通、數學連結與數學評析能力 (康軒文教事業, 2009a)。

亞洲國家（如臺灣、新加坡）與西方國家的數學教育在特色與文化上皆有許多相異之處，如臺灣與新加坡長久以來在國際測驗評比都優於西方國家 (e.g., TIMSS, PISA)，若要比較亞洲國家與西方國家的差異，新加坡和美國是兩個最佳選擇。因為新加坡的國際測驗評比屢獲佳績，而美國被視為數學教育的先驅，且足以代表西方文化，因此，關於新加坡與美國的比較是國際期刊關注的重點 (Fan & Zhu, 2007)。甚至美國教育部都願意提供經費進行新加坡數學課程研究 (Ginsburg, Leinwand, Anstrom, & Pollock, 2005)。是故，比較新加坡和美國差異研究的重要性不言可喻。此外，臺灣身為另一個典型的亞洲國家，亦具有比較價值，且臺灣與新加坡課程相似，更能凸顯為何亞洲國家能有突出的國際測驗表現。同時，由臺灣與新加坡的比較可以看出兩個相同文化中細微差異，並瞭解此差異是否是導致新加坡表現優於臺灣的原因。更重要的是，藉由比較表現比臺灣優異的新加坡，以及成績逐年提升的美國，將可以同時學習兩種不同文化特長，並提供教科書編輯或教師選取教學素材的參考。

許多研究指出，透過跨國性教科書內容的比較，可以讓大眾深入瞭解各國數學教科書在內容編排與設計之差異與優缺點，進而作為未來教科書編修或發展新教科書之參考依據 (陳仁輝、楊德清, 2010；Fan, Zhu, & Miao, 2013; Hiebert et al., 2003; Stein et al., 2007; Stigler & Hiebert, 2004; Tarr et al., 2008; Yang et al., 2010)。基於上述理由，本研究針對臺灣「康軒數學」 (Kang Hsuan, KH)、新加坡 NSM 以及美國 CMP 國中階段數學教科書之幾何主題內容異同，進行探討與分析。除了課本裡的佈題，也參照了各國數學的課程綱要進行分析比較，希望可從中獲得各國課本的編排中，探討其所含的教育理念與規劃特色，以及其中的邏輯順序。研究問題如下：

- 一、臺灣、美國與新加坡，國中階段數學教科書幾何單元總題數是否有顯著差異？
- 二、臺灣、美國與新加坡，國中階段數學教科書幾何教材佈題方式與表徵型態之差異為



何？

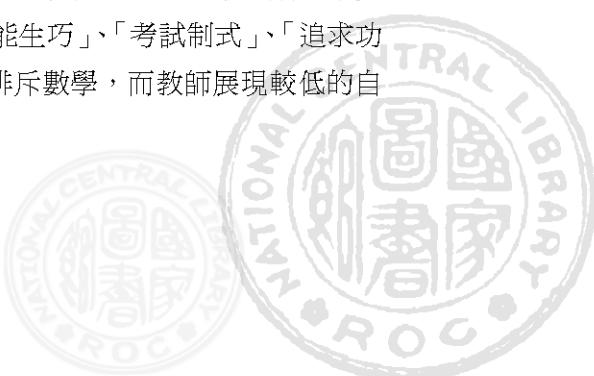
三、臺灣、美國與新加坡，國中階段數學教科書中幾何教材編排內容特色為何？

貳、文獻探討

一、臺灣、美國與新加坡數學教材之設計理念與文化差異

教育部在 97 新綱（教育部，2008）中指出：數學是一種語言，期望除了數學所必備的演算能力外，也希望學生能夠利用生活經驗、直觀和抽象思考方法揉合在一起的活動，培養數學溝通能力，並運用精確的數學語言表達自己的想法及進行問題解決。KH 參照了教育部的理念，其所設計的教材之發展是以生活為中心，並配合學生之身心與思考發展，編輯理念乃是營造一個適合學生學習數學的環境，並培養其數學思考、連結與溝通進而獲得數學方面之知識與推理之能力（康軒文教事業，2009a）。教材設計的方式乃是從數學知識的觀點而來，並參考 Piaget 之理論著重於具體操作，除了以學生的學習為考量重點外，更重視教師方面的教學（徐偉民、林美如，2009）。CMP 乃是美國為了改進其數學教育，於 1991~1996 年及 2000~2006 年間由美國 NSF 所贊助之計畫。CMP 為六~八年級之中學教師教學與學生學習所發展之一套數學課程，其目的主要是協助學生發展重要之數學概念、技巧與推理，以及數學思考與理解能力。此套教材之設計理念與目標乃是希望所有學生皆能熟練數學之溝通與推理，並具備運用數學符號、表徵形式、工具等之智能與技巧，這些能力亦包含問題解決、推理、洞察力及創造思考力。另一方面，教材設計基礎乃是以問題為中心，藉由問題情境之設計，使學生在問題探索與解決之同時，能發展出其邏輯概念，並透過教師之協助進而發展其數學知識及解題策略。此種以問題為中心之課程發展方式，不僅可幫助學生增加數學理解能力，亦有助於學生處理數學知識之連結能力（Hall, 2009）。NSM 教材乃參照 2007 年新加坡教育部所頒定之中學數學課程綱要，以及涵蓋「新加坡—劍橋普通教育」的 O 級證書會考（GCE O Level）數學課程綱要而來。此系列教材之編輯理念與目標乃幫助學生更加的瞭解數學內容，有幾個重要的特色，首先強調課程內容的連結與一致性；其次解題（problem solving）與教學間的整合；最後是資訊融入於課程中（張守波，2011）；同時，教材內容亦不斷地更新以提供學習者最佳之內容與資訊（Teh & Loh, 2007a）。

Leung (2001) 指出亞洲與西方國家的文化價值差異，形成六種不一樣的特色（亞洲和西方）：(一) 注重結果和注重過程；(二) 記憶是學習和有意義的學習；(三) 用功讀書和愉悅學習；(四) 外在動機和內在動機；(五) 全班教學和個別化學習；(六) 注重教師學科知識和注重教師教學知識。造成這些差異的原因是來自於國家的文化與價值。亞洲國家長期以來受到儒家思想的影響 (Biggs, 1996)，即崇尚「勤學苦讀」、「熟能生巧」、「考試制式」、「追求功名」等價值觀，在此價值下學生展現較低的自我概念，也較排斥數學，而教師展現較低的自



信心與注重程序教學（張奠宙，2007）。西方國家則深受西方人文主義的影響，「以人為中心」、「注重完整的人格發展」、「強調情意」等價值觀（楊龍立，1994）。在此文化下，他們發展出注重過程的教學、學生有較高的自我效能與較喜歡數學，這些反映在教學上則呈現西方國家教師教學時較注重學生的興趣，較不重視教科書；反之，亞洲國家，如實地教授教科書內容是件重要的事（Leung, 2006）。

文化差異將影響不同國家的教科書內容的呈現方式，例如 Zhu 與 Fan (2006) 的研究指出，美國的教科書呈現較多圖形表徵與真實情境的應用問題，相較於（東）亞洲國家則有較多的抽象符號表徵的使用。此外，東亞國家的教科書涵蓋較多的數學主題，並且有較高難度的數學題目 (Hong & Choi, 2014)，這呼應了東亞國家注重「勤學苦讀」與「記憶背誦」等特質；因此，東亞國家鼓勵學生解難題、以較抽象的方式學數學。

二、國內外相關研究

(一) 教科書相關研究

教科書影響著學生的學習，更是學生獲得知識的來源之一 (Devetak, Vogrinc, & Glažar, 2010)，因此，教科書的內容組織、佈題方式或呈現順序等，就顯得極為重要。Fan 等 (2013) 的研究指出，教科書的內容對於教師教學及學生學習十分重要；Reys、Reys 與 Chavez (2004) 認為教科書中之佈題與呈現方式在教學過程中影響著教師教學及學生的學習；而 Stein 等 (2007) 在研究美國兩套數學教材時發現，此兩套教科書在組織形式、相異因子組成的比重及內容呈現之順序等方面差異性大，且這些差異性將會影響學生日後的學習表現；在 Zhu 與 Fan (2006) 的研究中更是凸顯了教材佈題的意義，此份研究主要是針對中國大陸與美國在中年級數學教科書的問題表徵形式做分析，目的在研究兩國中學數學教科書在課室的教學活動中如何去表徵不同的問題型態。在分析類目上，研究者建構不同的問題型態分類，共有七個類型，包括：例行性問題與非例行性問題、傳統問題與非傳統問題、開放性問題與封閉性問題、應用問題與非應用問題、單步驟問題與多步驟問題和條件充足問題、無關條件與條件不足問題，以及數學型態問題、文字型態問題、視覺型態問題、聯合型態問題等七種。研究結果顯示，增加真實情境問題或應用問題的數量，不但能促進教科書問題的多樣化，更能營造一個有利於高層次理解的學習環境。由此觀之，教科書的編製方式、內容呈現方法或是問題表徵型態，在教學活動中深深影響著教師的「教」與學生的「學」。

由以上論述可知，學生與教師都是很依賴教科書的，特別是在許多亞洲國家，甚至教科書被當成「聖經」看待 (Huang & Cai, 2011; Park & Leung, 2006)。Ding 和 Li (2010) 更直接指出，跨國家的數學教科書比較可提供大眾更多機會去瞭解課室中的教師如何去影響學生的數學思維；而且也可以提供診斷與決策的資訊，以及如何透過課室讓學生有更好的學習機會 (Cai, 2001)。



(二) 幾何知識相關研究

「圖形」是一種抽象的幾何概念，並非實際存在的物體。在日常生活中，當我們對空間物體進行探索，並知覺、分析與歸納這些真實物體的屬性時，因而構成了基本的幾何概念，稱之為「基本概念」，如大小、形狀等。緊接著再進行這些基本概念的再抽象，即構成了「次級概念」(Skemp, 1987)。NCTM (2000) 也認為在邏輯推理與數學公設的架構上，幾何是主要角色之一，並進一步地認為幾何是數學教育內一項重要主題。Duval 認為學童對於幾何圖形的理解可藉由認知、心向轉換、圖形操弄與推理等歷程，使其達到知覺性、構圖性、論述性等瞭解，從而解決在幾何圖形所面臨之問題(吳德邦、馬秀蘭、藍同利, 2006; Duval, 1995)。而 van Hiele (1986) 提出幾何概念思考可分為五個層次，不受年齡的成熟度影響，而是與教學有關，且每個層次皆有其發展特色。Burger 和 Shaughnessy (1986) 的研究中也主張：幾何概念的提升有助於發展問題解決能力。除此之外，幾何的思考可以建構學生空間能力與空間感知，在數學的教與學上都有著舉足輕重的地位 (Jones, 2010)。

上述提及幾何的重要性，以及幾何概念的發展歷程。這個認知發展過程深受教學的影響，而教學又與數學課本息息相關。因此，透過跨國性的教科書分析，可提供不同國家的教科書如何處理相關的數學主題，藉由瞭解不同教科書的處理方式，或許可激發實務教師思考最適切的教學素材，並實際回饋到他們的課室（幾何）教學中。

三、啓示

教科書研究可從許多不同的面向來分析(楊德清、陳仁輝, 2011; Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Ding & Li, 2010; Fan & Zhu, 2007; Hong & Choi, 2014; Yang et al., 2010; Zhu & Fan, 2006)，這些分析主要可分成四個方向：(一) 內容結構：如，如何介紹數學概念、先後次序為何或編排特色；(二) 題目難度：可依認知負荷高低或開放／封閉型區分；(三) 表徵類型：如抽象、圖形表徵等出現多寡；(四) 教科書背景資料，如頁數與題數等也是分析指標。上述分類與 Charalambous 等(2010)的論點相符，他們將教科書分析分為水平化(horizontal)與垂直化(vertical)。所謂水平化指的是從整體的觀點來看教科書，如本研究中的「內容特色」與「題數」符合此範疇；垂直化與教科書如何處理數學概念有關，換言之，它比水平化更深入，以進一步瞭解教科書細部內容，如文本中的題目難度與表徵類型，即屬於此範疇。根據上述，我們選擇教科書特色、開放／封閉、表徵類型、題數作為本研究的主軸，以反映出這些教科書之異同，以提供未來修正或發展教科書之依據。

參、研究方法

本研究採內容分析法，以 Zhu 與 Fan (2006) 之研究架構為基礎，並針對本研究之需要再



修訂分析單位與類目。由於三套教材佈題呈現多元化，因而分析之範圍以課本為主，習作、教師手冊等不列入分析範圍。本研究三套教材計數範圍為：臺灣 KH 包括「例題」、「問題探索」、「動動腦」、「活動」；美國 CMP 包括「問題」、「數學反思」，以及新加坡 NSM 包括「例題」、「例題回顧」。

一、研究樣本

本研究欲探討臺灣、美國與新加坡國中階段數學教材中幾何內容之異同。研究採立意取樣方式選擇臺灣 KH、美國 CMP 及新加坡 NSM 國中階段幾何內容作為研究對象。研究對象背景敘述如下：

(一) 臺灣 KH

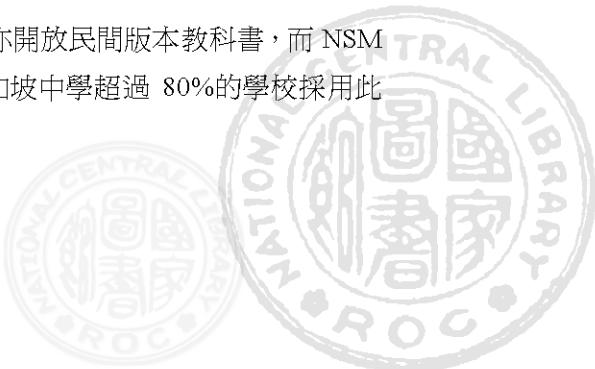
KH 之發展以生活為中心，配合學生之身心與思考發展，除了以學生的學習之外，更重視教師的教學；其編輯理念乃是營造一個適合學生學習數學的環境，並培養其數學思考、連結與溝通，進而獲得數學知識與推理之能力（康軒文教事業，2009a）。KH 七～九年級教材，七年級有八章、八年級有八章、九年級有六章，共 22 章。幾何主題則占了七章，分別為八年級之「平方根與勾股定理」、「幾何圖形與尺規作圖」、「三角形的基本性質」、「平行」與九年級之「相似形」、「圓」、「幾何與證明」。本研究以上述七章作為研究對象。

(二) 美國 CMP

美國 CMP 是專為六～八年級之中學學生所發展之數學課程，其目的主要是協助學生發展重要之數學概念、技巧與推理及數學知識之理解。CMP 是美國為了改進其數學教育，由美國 NSF 贊助下所研發之教材，本數學教科書是目前美國國中數學教科書中使用率最高的版本（Cai, Wang, Moyer, & Nie, 2011; Rivette et al., 2003; Show-Me Center, 2002），更被美國教育部的數學與科學專家小組（Mathematics and Science Expert Panel）列為模範教材（Herbel-Eisenmann & Wagner, 2005）。此教材設計之特色乃是以問題為中心，藉由問題情境之設計，使學生在問題探索與解決之同時，能發展出其邏輯概念、解題策略等，並經由教師之協助進而發展其數學想法，同時，教材的設計亦強調學生在處理數學知識的連結能力。CMP 六～八年級的教材中，包含了數、幾何、代數、統計與機率等四項主題。每年級各有八個單元，共 24 個單元，其中幾何內容有六個單元，分別為六年級之「形狀與圖樣」、「覆蓋與環繞」，七年級之「伸展與收縮」、「填滿與包覆」，以及八年級之「畢氏定理」、「萬花筒、鈕扣、鏡子」。本研究以此六個單元作為研究對象。

(三) 新加坡 NSM

新加坡教育當局於 2001 年頒布新的數學課程綱要，同時亦開放民間版本教科書，而 NSM 即為其中一個版本（SGBox, 2009）；就使用率方面而言，新加坡中學超過 80% 的學校採用此



教材 (SGBox, 2009)。此系列教科書之內容包含許多例子與一些富有挑戰性之問題，除了提供學生練習的機會，亦能滿足不同能力學生之需求。NSM 七～九年級的教材中包含了數、代數、幾何、測量、統計、機率等主題。其中，七年級有 16 個單元、八年級有 12 個單元、九年級有 13 個單元，共 41 個單元。幾何主題則占了 16 個單元，分別為七年級（中一）之「測量與估算」、「簡單幾何圖形之周長與面積」、「體積與表面積」、「基本幾何概念與性質」、「多邊形之角的性質」、「幾何結構」，八年級（中二）之「全等與相似」、「畢氏定理」、「體積與表面積」，以及九年級（中三）之「座標幾何」、「全等與相似三角形」、「相似圖形的面積與體積」、「三角函數」、「進階三角函數」、「測量—弧長、扇形面積、弧度測量」、「圓的幾何性質」。本研究以上述 16 個單元為樣本。

二、分析單位

本研究以「單元（章）」作為區分單位，並以教科書之「題」作為最小分析單位。本研究所定義的「題」說明如下：

(一) 題目之敘述僅包含一個問題者，計數為一題。例如：

A rectangular field is 13 m long and 10 m wide. It has a cement path m wide around it.
What is the area of the cement path? (Teh & Loh, 2007a, p. 172)

(二) 一個題目中包含兩個問題之題組者，各小題分別記數一題。例如：

直角座標平面上有 A (2, 0)、B (5, 0)、C (-4, 3)、D (2, 3) 四點，分別求出下列各小題中兩點的距離。(1)A、B，(2)C、D。(康軒文教事業, 2009a, p. 96)

三、分析類目

本研究針對數學問題所做之歸類，除了參考 Zhu 與 Fan (2006) 之觀點外，同時考量過去之相關研究 (Yang et al., 2010)，將本研究之數學問題分為佈題型態（開放型問題與封閉型問題）與表徵型態（數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態）兩大類。說明如下：

(一) 佈題型態

1. 開放型問題

係指一個問題可能有數個或很多個正確答案之題目 (Zhu & Fan, 2006)。如：「指出教室內至少三種平面幾何？」。此問題可能有多種不同之答案，因此歸類為開放型問題。此外，若問題之中出現「為什麼？」則學生回答之內容可能會非常多樣化，因此，亦視為開放型問題。



2. 封閉型問題

題目只有一個正確答案 (Zhu & Fan, 2006)。如：「若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，頂角 $\angle A=70$ 度，請問底角 $\angle B$ 的一個外角是幾度？」。此題目 $\angle B$ 的一個外角為 125 度，答案只有一個，因此歸類於封閉型問題。

(二) 表徵型態

1. 數學型態

問題之主軸只包含數學符號的表徵 (Zhu & Fan, 2006)。如：「已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ，求證： $\overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 2$ 」。此問題之主軸為數學符號，因此歸為數學符號型態。

2. 文字型態

問題主軸完全是以文字敘述者，則歸為此類 (Zhu & Fan, 2006)。如：「請問十二邊形的內角和是多少度？」此問題之主軸以文字敘述為主，因此歸為文字型態。

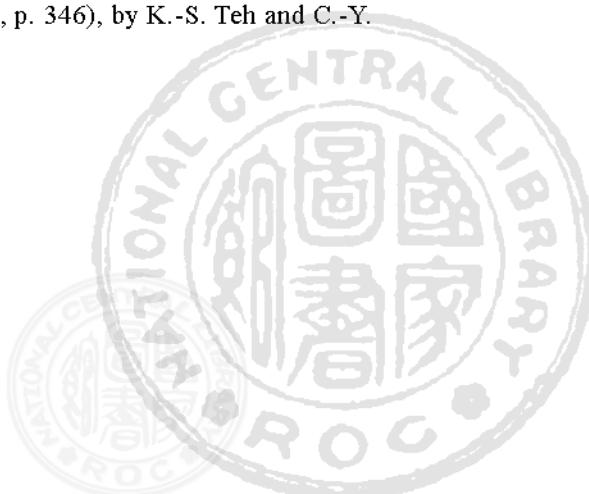
3. 視覺型態

問題之主軸含括插圖、圖像、圖表、地圖等等，則視為此類型 (Zhu & Fan, 2006)。如圖 1，此問題之主軸僅用表格呈現，因此歸類為視覺型態。

- 8.** Copy and complete the table below for sectors of a circle, giving your answers correct to the nearest whole number.

	<i>Radius</i>	<i>Angle at centre</i>	<i>Arc length</i>	<i>Area</i>	<i>Perimeter</i>
(a)	7 cm	72°			
(b)	35 mm				136 mm
(c)		270°		1848 mm^2	
(d)		150°	220 cm		
(e)	14 m		55 m		
(f)		75°		154 cm^2	

圖1. 視覺型態問題。引自 *New syllabus mathematics 3* (6th ed., p. 346), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2008a. Singapore City, Singapore: Shinglee。



4. 聯合型態

問題呈現方式包含兩種或兩種以上之上述型態者，歸為此類 (Zhu & Fan, 2006)。如圖 2，此題不僅有文字詳細敘述，且輔以圖形表徵，兩者皆為問題之主軸，因此歸類於聯合型態。

- 2.** A 60-foot piece of wire is strung between the top of a tower and the ground, making a 30-60-90 triangle.
- How far from the center of the base of the tower is the wire attached to the ground?
 - How high is the tower?

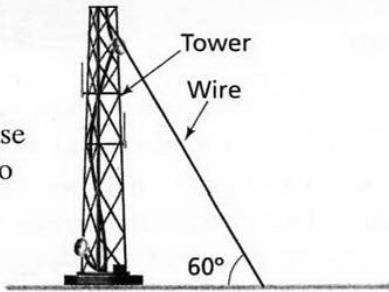


圖2. 聯合型態問題。引自 *Connected mathematics: Looking for Pythagoras* (p. 66), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006a. Boston, MA: Prentice Hall。

(三) 內容特色

幾何教材編排內容特色之分析採質性方法，並參考相關研究使用垂直分析法 (vertical analyses) (Charalambous et al., 2010)，針對三國幾何教材內佈題內容，進行比較分析。分析焦點是：1. 幾何概念引入方式；2. 課程主題編排順序；3. 各版本在概念介紹的共同性與差異性。分析的過程是，研究者先閱讀各個教科書如何呈現這些數學概念，初步瞭解各教科書強調的重點，並以螢光筆標示必要內容，記錄心得，接著與另一位研究者進行反覆地討論磋商，釐清各個教科書的特色。過程中雙方會互相質疑與批判對方的論點，直到有一方可以提供具體的說明或證據，最後才達成共識。

以分析臺灣教科書第三章三角形的基本性質為例，一位研究者先審視這個單元共包含幾個章節，接著仔細閱讀概念的引入方式，例如臺灣課本中，三角形的內角和是以摺紙的方式引入，讓同學探索後再給予正式定義與例題。另一位研究者會將此觀察與其他教科書進行相互比較，再與前述研究者討論不同的概念方式有何意義？代表教科書的何種特色？

文獻指出教科書的分析有兩種主要的方式，分別是水平化分析 (horizontal analysis) 和垂直化分析。其中水平化是由宏觀的角度，給予讀者這本教科書的整體分析，例如，有多少頁數、有多少課程主題等 (Charalambous et al., 2010)。垂直化分析則是比較微觀的分析，例如，題目類型、數學主題、數學主題呈現次序 (Hong & Choi, 2014)，本研究中的分析比較偏向水平垂直化分析，然而，這並不意謂我們只分析題目類型，我們同時也分析教科書如何呈現這些數學主題。此外，Li (2000) 也提到同時分析教科書的「內容」與題目，可以確保我們更加瞭解學生可能可以怎樣透過教科書學習。

四、效度檢定

本研究所採取之信度檢驗方式乃以「評分者信度」為主，由二位評分員連同研究者共三人一同進行，此二位評分員分別為國中與國小教師，教學資歷豐富。而樣本之選取乃是從臺灣、美國與新加坡之三套教材中，選擇「相似形」與「相似三角形」之幾何單元。先確立分析類目之定義，再由三位具有數學背景的教師或研究員個別分析出結果後，求出相互一致性，最後再利用格柏納（Gerbner）公式得出兩種類目分類的信度為 .93，具有良好信度。公式如下（黃光雄、簡茂發，1993）：

(一) 求相互同意值 P_i 。

$$P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2} \quad (M : 表\ 2\ 人\ 同意\ 的\ 項\ 目\ 數,\ N_1\ 及\ N_2 : 每\ 人\ 應\ 有\ 的\ 同\ 意\ 數。)$$

(二) 求平均相互同意值 P 。

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{N} \quad (N : 相\ 互\ 比\ 較\ 的\ 次\ 數)$$

(三) 求信度 R 。

$$R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]} \quad (n : 評\ 定\ 員\ 人\ 數)$$

其中 3 位評分員兩兩相互同意度為 .81、.81、.86， $P = .83$ ， $R = .93$ 。

此外，本研究採用之分析類目表，乃參酌國內、外相關研究（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005；Yang et al., 2010; Zhu & Fan, 2006）所使用之研究工具，以確定分析之架構；同時，在編製的過程中，研究者不斷地與多位數學教師進行討論與修改，並共同研討不一致的題目直到一致性，以建立專家效度。

肆、研究結果與討論

一、三套教材之佈題數量具顯著差異

表 1 呈現三套教科書在幾何主題之佈題數量、佈題型態與表徵型態差異的比較。

資料顯示，三套教材中美國 CMP 的總題數為 766 題，遠超過其餘兩套教材的題目數量，與其他兩套教材相較之下，提供了較多的數學問題，不但是新加坡 NSM 總題數的兩倍多，更是臺灣 KH 總題數的三倍左右，此現象亦與其他相關研究結果 (Hong & Choi, 2014; Zhu & Fan, 2006) 不謀而合。運用 chi-square 統計方法檢驗 ($\lambda^2(2)=5.991$, $p < .001$)，結果顯示，三套教科書在幾何問題總題數存在顯著差異；Marascuilo (1966) 事後考驗結果進一步顯示臺灣 KH 與美國 CMP、美國 CMP 與新加坡 NSM，以及臺灣 KH 與新加坡 NSM 在幾何問題之總題數

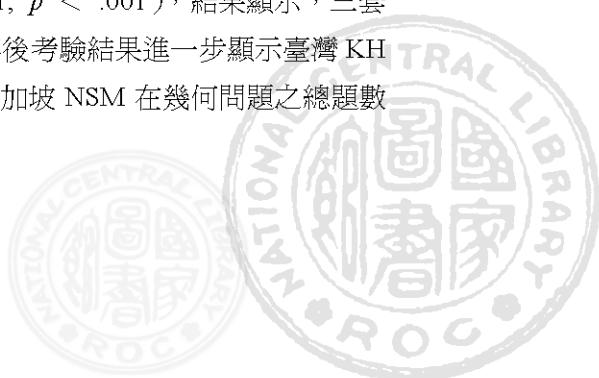


表 1

三套教科書佈題數量、佈題型態與表徵型態差異的比較分析一覽

	問題型態	臺灣康軒數學	美國連結數學	新加坡新課程數學
佈題 型態	開放型問題	9 (3.1%)	255 (33.3%)	2 (0.01%)
	封閉型問題	277 (96.9%)	511 (66.7%)	322 (99.9%)
	數學型態問題	22 (7.7%)	29 (3.8%)	64 (19.7%)
	文字型態問題	68 (23.8%)	304 (39.7%)	89 (27.5%)
	視覺型態問題	15 (5.2%)	37 (4.8%)	41 (12.7%)
	聯合型態問題	181 (63.2%)	396 (51.7%)	130 (40.1%)
總題數		286 (100%)	766 (100%)	324 (100%)

註：百分比 = (該版本於類目之下的題數) ÷ (該版本總題目數)，取小數點後第一位。

間皆存在顯著差異。此結果顯示，美國 CMP 在幾何問題之總題數顯著多於臺灣 KH 與新加坡 NSM；同時，新加坡 NSM 在幾何問題之總題數亦顯著多於臺灣 KH。Zhu 與 Fan (2006) 認為學生的學習以及解決問題能力與其所接觸問題數量的多寡息息相關，且進一步指出，除了接觸問題頻率的高低之外，不同型態的問題對學生的解題能力亦深具影響力 (Michael, 2002; Zhu & Fan, 2006)。

雖然單純比較題數（不考慮教師如何使用教科書等其他因素）能夠做的推論很有限，但誠如上述，它仍是一個可供參考的重要指標 (Zhu & Fan, 2006, p. 617)，與其他研究結果相互對照，可以幫助我們發現不同教科書的差異性。例如 Hong 和 Choi (2014) 指出美國國小教科書 *Everyday Mathematics* 與韓國教科書相比有較少的題數，但中學教科書 CMP 則比韓國教科書有較多的題目，這可以引發我們進一步思考：「是否美國改革取向的教科書都具有較多的題數？」、「這些題數多寡與教學的關聯為何？」，相信可以引發後續研究進階討論。

此外，雖然 Zhu 與 Fan (2006) 也提到比較「不同題目類型」更具價值，然而，題數是我們進階分析的基礎，例如，雖然美國的題數多，但 Leung (2006) 告訴我們亞洲國家比較偏向如實的使用教科書的題目；而西方國家則是選擇性的使用，因此就兩國而言，也許在同主題下學生接受到同樣頻率的題目；或者我們想進一步探討教學或是學生練習次數的多寡，教科書的題數可以提供部分證據。

二、三套教材佈題方式與表徵型態之差異的比較

在佈題方式（開放型與封閉型問題）方面，資料顯示 KH 開放型問題占 3.1%，封閉型問題占 96.9%；CMP 開放型問題占 33.3%，封閉型問題占 66.7%；NSM 開放型問題占 0.01%，封閉型問題占 99.9%。此顯示三套教科書之題目安排皆著重封閉型問題之設計，尤以臺灣 KH 與新加坡 NSM 兩套教材更甚，兩者所含之封閉型問題比例高達 95%以上，此結果和 Zhu 與



Fan (2006) 之研究結果相呼應。此外，運用 chi-square 統計方法可以得到 ($\chi^2(2)=5.991, p < .001$) 之結果，進一步顯示三套教科書在開放型問題之總題數存在顯著差異。同時有研究指出，教科書佈題若安排較少開放型問題，學生在這方面之學習經驗缺少，因此，當學生在面對開放型問題時可能將有更多的困難 (Cai, 1995; Zhu & Fan, 2004, 2006)。

此外，三套教科書在題目之設計上亦有不同。以三角形之相關單元為例，KH 在封閉型問題之佈題方式較為乾脆俐落，也就是題目在敘述與標示明確後，即要求學生回答問題，如圖 3、4 皆是如此。而開放型問題則多以作圖題之方式呈現，如圖 5 之例題。此外，KH 在幾何內容教材中缺乏「無制式化解答」問題之編排，如：日誌類型之問題，因此，並無要求學生寫出自己經驗與想法的例題。

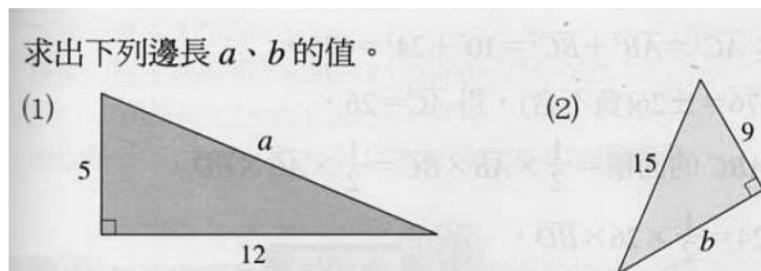


圖3. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第三冊，p. 91），康軒文教事業（主編），2009a。
臺北市：康軒文教集團。

如右圖，樂觀號的船帆是一塊直角三角形的帆布，已知此帆布一股長15公尺，斜邊長17公尺，帆船手阿傑須將船帆拉離帆船桿 a 公尺，才能將整張船帆展開。
則 a 的值為多少？



圖4. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第三冊，p. 92），康軒文教事業（主編），2009a。
臺北市：康軒文教集團。

1. 例題 3 中，你有其他的方法找出 D 點嗎？
2. 如果以右圖的 A 、 B 、 C 三點當作平行四邊形的其中三個頂點，那麼可以畫出幾種不同的平行四邊形呢？
 1. 略。
 2. 有 $ABCD_1$ 、 ABD_2C 、 $ACBD_3$ 三種不同的平行四邊形。

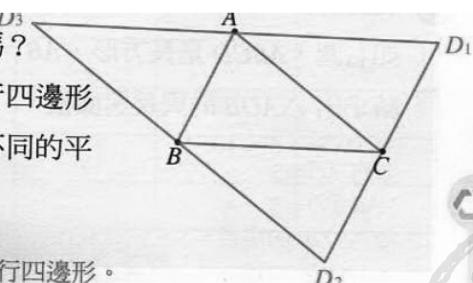


圖5. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第四冊，p. 72），康軒文教事業（主編），2009b。
臺北市：康軒文教集團。



美國 CMP 教材習慣以題組方式呈現，因而開放型與封閉型之問題常穿插出現於題組中。如圖 6 之例題屬封閉型問題，圖 7 例題要求學生能夠進行實作與畫圖則屬開放性問題。

C. Determine whether the triangle with the given side lengths is a right triangle.

1. 12 units, 16 units, 20 units
2. 8 units, 15 units, 17 units
3. 12 units, 9 units, 16 units

圖6. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Looking for Pythagoras* (p. 37), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006a. Boston, MA: Prentice Hall。

A. On 5 dot-by-5 dot grids, draw squares of various sizes by connecting dots. Draw squares with as many different areas as possible. Label each square with its area. Include at least one square whose sides are not horizontal and vertical.

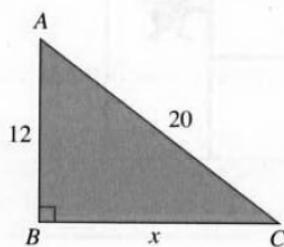
圖7. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Looking for Pythagoras* (p. 19), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006a. Boston, MA: Prentice Hall。

新加坡 NSM 在封閉型問題之佈題與 KH 之設計有許多雷同之處，如圖 8 即為一例，其題型幾乎與圖 3 之題型相同；此外，NSM 在題目之設計上，其敘述與佈題方式同樣講求簡潔而明確，如圖 9 所示，在問題中並無多餘之文字贅述。

Example 3

Calculate the value of x in each case.

(a)



(b)

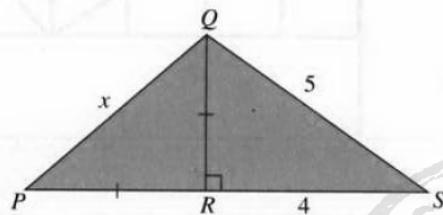


圖8. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 2* (6th ed., p. 181), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007b. Singapore City, Singapore: Shinglee。

Example 7

Find the values of p , q , r and s in the figure shown on the right.

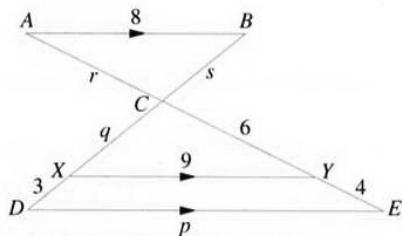


圖9. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 2* (6th ed., p. 181), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007b. Singapore City, Singapore: Shinglee; *New syllabus mathematics 3* (6th ed., p. 301), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2008a. Singapore City, Singapore: Shinglee。

在開放型問題方面，如圖 10 之題(c) 與(d) 要求解釋原因。

Example 4

The figure consists of a square and four identical rhombuses.

- (a) (i) Explain why $\vec{AB} = \vec{IJ}$.
(ii) Name two other vectors that are equal to \vec{AB} .
- (b) Name all the vectors that are equal to
 - (i) \vec{KL} ,
 - (ii) \vec{DE} ,
 - (iii) \vec{BC} ,
 - (iv) \vec{AK} .
- (c) Give a reason why $\vec{AG} \neq \vec{DJ}$.
- (d) The line segments BD and HJ have the same length and are parallel.
Explain why $\vec{BD} \neq \vec{HJ}$.
- (e) Give a vector that has the same magnitude but opposite direction to
 - (i) \vec{BC} ,
 - (ii) \vec{EF} ,
 - (iii) \vec{LA} .

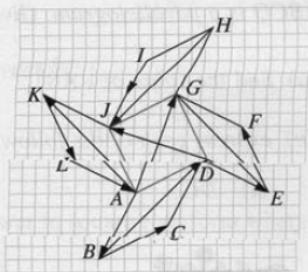


Fig. 3.11

圖10. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 4* (6th ed., p. 82), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2008b. Singapore City, Singapore: Shinglee。

三套教材在各表徵型態中，以「聯合型態問題」的比例為最高 (KH: 63.2% ; CMP: 51.7% ; NSM: 40.1%)，即使是在所占比重較低的新加坡，也占了四成。其次為「文字型態問題」(KH: 23.8% ; CMP: 39.7% ; NSM: 27.5%)，而在「數學符號型態問題」上，NSM 占 19.7%，明顯



多於 KH (7.7%) 與 CMP (3.8%) 所占比率 ($\chi^2(2)=26.42, p < .001$)。在「視覺型態問題」上，三套教材所占比例皆最少。由此顯見，三套教材在佈題表徵上多仰賴兩種或兩種以上之型態為主，其次才是文字型態之敘述。

三、小結

研究發現，三套教科書在「開放型與封閉型問題」部分，美國之 CMP 有將近三分之一的問題屬開放型問題，而 KH 與 NSM 之題目安排則較注重封閉型問題之設計，其所含括之封閉型問題比例高達九成五以上。相關研究指出，教科書之佈題若安排較少開放型問題，會使得學生缺乏從教科書中獲得較多學習開放型問題之經驗，因此將影響學生解開放型問題之能力 (Cai, 1995; Zhu & Fan, 2004, 2006)。如 Cai (1995) 的研究即發現，學生在解開放型問題時常常面臨困境，其主要原因乃是由於學生所使用之教科書的佈題方式多以封閉型問題為主。由此可知，教科書之開放型問題的佈題情形將影響學生學習開放型問題之機會，進而影響其解題表現。在「數學符號型態、文字型態、視覺型態與聯合型態問題」方面，三套教材之問題以「聯合型態問題」為主，其次則為「文字型態問題」，此兩者所涵蓋之比例最高，約有七至八成以上，由此可看出三套教材在佈題表徵上多仰賴兩種或兩種以上之敘述型態為主，反觀「數學符號型態問題」與「視覺型態問題」所占比重明顯偏低。表 1 的表徵型態顯示，相較於視覺型態問題，新加坡教科書有較高比例的數學型態問題 ($19.7\% > 12.7\%$)，臺灣則是略高 ($7.7\% > 5.2\%$)，美國則是在視覺型態問題的比例略高於數學型態問題 ($4.8\% > 3.8\%$)。過去的研究大多顯示美國教科書有較高比例的視覺型態問題 (e.g., Zhu & Fan, 2006)，然而，在本研究並不明顯。視覺型態題目的多寡與學生的解題表現有關，Brenner、Herman、Ho 與 Zimmer (1999) 指出，中國學生相對在視覺表徵問題表現較差，Cai 也發現美國學生較中國學生喜歡使用視覺表徵策略解題，從上述觀點來看，新加坡的高數學型態問題比例似乎與上述文獻呼應。然而，上述三套教科書中，僅新加坡的結果達顯著差異 ($Z=2.45, p < .05$)，美國與臺灣教科書的比較並未出現顯著差異，是故上述推論必須謹慎看待，不必然具有一般性。

由上述之發現可知，教科書之分析有利於理解學生學習之內容，以及影響教師之教學內容 (Zhu & Fan, 2004)。而教科書中所提供之教學範例、內容、脈絡情境與表徵方式，對於課室中所進行之教學活動扮演著相當重要之影響角色 (Stein et al., 2007)。因此，教科書的良莠對學生的學習表現與成就十分重要。

四、三套教材之特色

三套教材國中階段數學教科書幾何內容之特色與發現說明如下：



(一) 康軒數學

1. 教材內容以有趣的圖文設計方式，適時引入相關數學故事或概念

教材在單元教學前，編製相關的生活化例子以引導學生的學習動機，並使其感受到數學與生活的密切關聯性；此外，於該單元教學後，提供相關的數學活動、故事或是相關概念以培養其數學思考與連結能力。以「圓」單元為例（如圖 11），為引導學生圓的概念，教材於單元教學之初，以英國倫敦泰晤士河畔之「倫敦眼」（London eye）作為開場白，並配合底圖摩天輪的設計，簡單介紹此世界著名之建築後，再引入該單元的教學，且於整個單元教學後，再補充相關數學內容，以強化學生所學之數學概念，如圖 12 所示。又如「相似形」單元在教學活動前（如圖 13）與教學活動後（如圖 14）亦有相同之課程設計。而相關的研究顯示，教材中的活動若能透過情境來引發，能有效地提升學生學習成效（Yang & Wu, 2010），且教材適時地融入真實情境更能激發出彈性的問題解決策略（Treffers, 1991; Yang & Wu, 2010）。上述結果顯示臺灣幾何教材在編排時，重視概念與情境的搭配，以幫助學生瞭解所學概念與生活的關聯性。

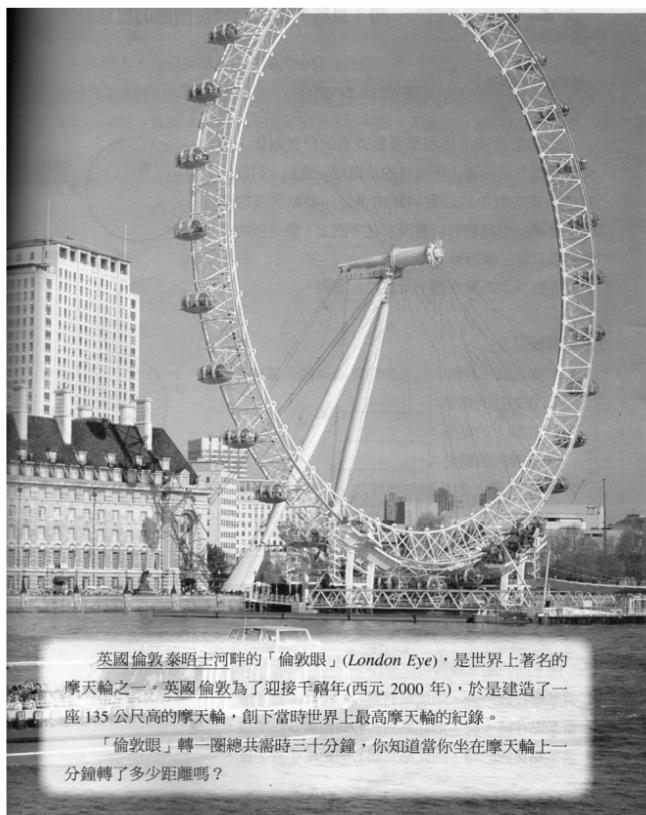
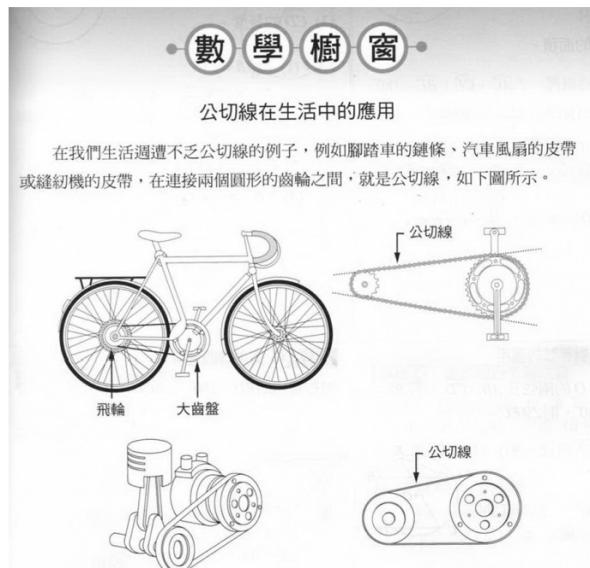


圖11. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第五冊，p. 59），康軒文教事業（主編），2009c。臺北市：康軒文教集團。





事實上，工業界也廣泛的利用兩圓的各種位置關係，作為設計機械時的參考，例如下圖中的幾個圓形齒輪，你看得出來它們是利用哪些位置關係來運轉的嗎？



圖12. KH教材例題。引自康軒國中數學課本(第五冊, p. 109), 康軒文教事業(主編), 2009c。
臺北市：康軒文教集團。



圖13. KH教材例題。引自康軒國中數學課本(第五冊, p. 5), 康軒文教事業(主編), 2009c。
臺北市：康軒文教集團。

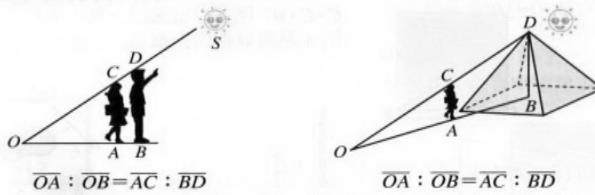


•數學櫥窗•

金字塔高度

希帕蒂婭(Hypatia, 約西元 370~415)是古希臘一位女數學家，父親西翁(Theon)是當時一位知名的學者、數學教授。西翁非常注意女兒的教育，所以 10 歲的希帕蒂婭已經擁有豐富的數學知識，並能運用學過的數學解決實際問題。有一次，西翁為了啟發女兒怎樣利用影子來測量建築物的高度，就提議去測量金字塔的高度。

黃昏時，西翁和希帕蒂婭到達金字塔後，夕陽將他們的影子拉得長長的，這時希帕蒂婭跟著父親一前一後向金字塔走去。當希帕蒂婭回頭看見自己的身影和父親的身影重合在一起，發現此時夕陽剛好與他們的頭頂在一條直線上，想起可以用學過的相似三角形對應邊成比例來計算金字塔的高度。她把這個方法講給父親聽，西翁聽後欣慰地笑了。希帕蒂婭意會到這種辦法是對的，高興得朝著金字塔方向飛奔而去。



$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BD}$$

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BD}$$

如果夕陽不是剛好與他們的頭頂在一條直線上，是否有方法測量金字塔的高度呢？圖(一)和圖(二)是兩個不同時間的金字塔影長和身影長。在某一時刻，金字塔影長 \overline{BA} ，身影長 \overline{RQ} ；另一時刻，金字塔影長 \overline{BO} ，身影長 \overline{RP} 。運用相似三角形對應邊成比例，可知 $\overline{BC} : \overline{TR} = \overline{AO} : \overline{QP}$ 。

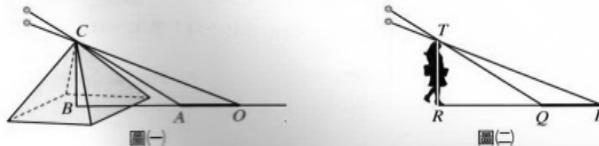
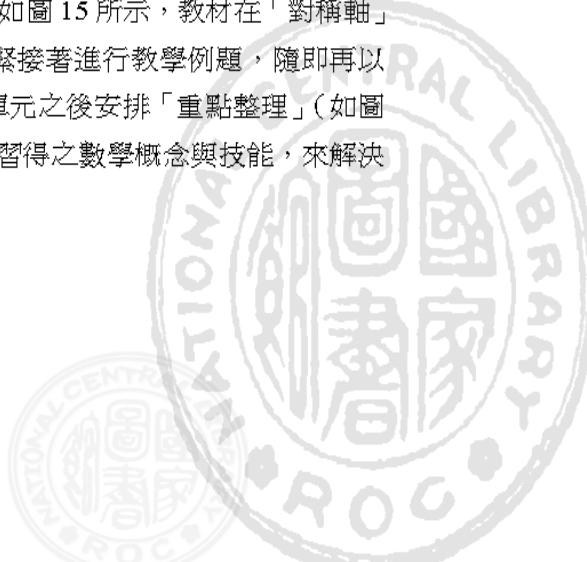


圖14. KH教材例題。引自康軒國中數學課本(第五冊, p. 57), 康軒文教事業(主編), 2009c。臺北市：康軒文教集團。

2. 教材內容編排豐富且多樣，採循序漸進之步驟為原則

教材每個單元編製程序為主題介紹、教學範例、學生隨堂練習、重點整理，以及自我評量等部分，並於之中穿插動動腦、問題探索或操作活動等內容，以循序漸進的方式引導學生數學概念之學習。以「垂直、平分與線對稱圖形」單元為例，如圖 15 所示，教材在「對稱軸」主題中安排操作活動之課程，以此方式介紹對稱軸的概念，緊接著進行教學例題，隨即再以動動腦的例子（如圖 16）提供學生思考的機會與空間，並於單元之後安排「重點整理」（如圖 17）與「自我評量」（如圖 18）兩部分，讓學生統整並應用已習得之數學概念與技能，來解決綜合性的數學問題。



主題三 對稱軸

前面談到的線對稱圖形都只看到一條對稱軸，那麼是不是所有的線對稱圖形，都只有一條對稱軸呢？我們來看看下面的例子。

活動 4 剪下來是什麼圖形

拿出附件(三)，依照下圖指示，先將紅色的正方形紙對摺兩次後，在角落剪一刀，如下圖所示。

1. 想想看，剪下來的「三角形」，打開之後是什麼圖形？
菱形。

2. 想想看，打開後的圖形是否為線對稱圖形？是。
如果是，說說看哪一條是對稱軸？有沒有第二條對稱軸？
摺痕就是對稱軸，一共有兩條對稱軸。
(1)
(2)

例 4 判別線對稱圖形並畫出對稱軸 對應能力指標 8-s-10

右邊兩個圖形分別是等腰梯形和長方形，觀察這兩個圖形是不是線對稱圖形。如果是，請畫出它所有的對稱軸。

圖15. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第五冊，p. 71），康軒文教事業（主編），2009c。
臺北市：康軒文教集團。

動動腦

長方形的對角線是不是對稱軸？

1. 過已知線段中點且與該線段垂直的直線，稱為該線段的垂直平分線（或中垂線）。

2. 將已知角平分為兩個等角的直線，稱為該角的角平分線（或分角線）。

3. 將一個圖形沿著某一條直線對摺，如果直線兩側的部分能完全重疊，這樣的圖形稱為線對稱圖形，而這條對摺線就稱為該圖形的對稱軸。疊合的點稱為對稱點，疊合的角稱為對稱角，疊合的線段稱為對稱線段。

4. 線對稱圖形的對稱軸為任兩對稱點連線段的垂直平分線。

圖16. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第五冊，p. 72），康軒文教事業（主編），2009c。
臺北市：康軒文教集團。



• 自我評量 •

1. 判斷下列各圖形是否為線對稱圖形，是的打√，並畫出該圖形的對稱軸；不是的打×。

(1)



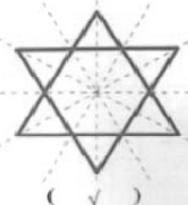
(×)

(2)



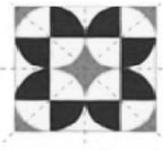
(√)

(3)



(√)

(4)



(√)

圖18. KH教材例題。引自康軒國中數學課本（第五冊，p. 73），康軒文教事業（主編），2009c。臺北市：康軒文教集團。

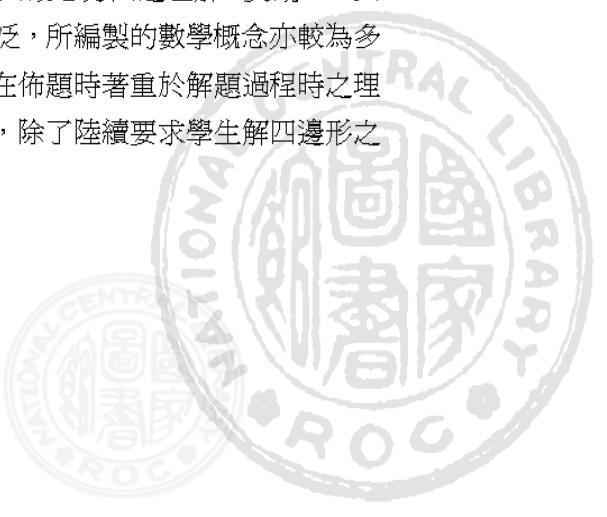
3. 教材中單元間的名稱互相獨立且較不具相關性

KH 教材在國中階段的幾何內容共有「平方根與勾股定理」、「幾何圖形與尺規作圖」、「三角形的基本性質」、「平行」、「相似形」、「圓形」與「幾何與證明」等七個單元，由單元名稱可看出單元間彼此的相關性並不高。

（二）連結數學

1. 強調問題之理解與應用而非制式化求解，數學概念之學習著重於深度而非廣度

CMP 教材在探討一個概念時，並非要求學生獲得許多廣泛的數學知識內容，而是強調學生在數學概念的學習是否達到深入的理解。以「不規則圖形與圓之測量」（Measuring Irregular Shapes and Circles）為例，此教學內容從不規則形體到圓的測量，其內容編排皆環繞著面積與周長之概念發展（如圖 19 與圖 20），並同時引入生活中相關之經驗問題（圖 21），如此不斷重複的圍繞在此數學概念內容，乃是為了強化學生在面積與周長概念方面之理解。反觀 KH 與 NSM 兩套教材之安排手法則異於 CMP，其教學內容則較為廣泛，所編製的數學概念亦較為多元，尚包含有圓切角、圓周角等數學概念。再者，CMP 教材在佈題時著重於解題過程時之理解與應用，而非只著重於求得最後標準答案，如圖 22 之題組，除了陸續要求學生解四邊形之相關問題外，在題目 D.2. 中更強調所學概念理解後的應用。



Problem 5.2 Finding Circumference

When you want to find out if measurements are related, looking at patterns from many examples will help.

- A.** Use a tape measure or string to measure the circumference and diameter of several different circular objects. Record your results in a table with columns for the object, diameter, and circumference.
- B.** Study your table. Look for patterns and relationships between the circumference and the diameter. Test your ideas on some other circular objects.
 - 1.** Can you find the circumference of a circle if you know its diameter? If so, how?
 - 2.** Can you find the diameter of a circle if you know its circumference? If so, how?

圖19. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Covering and surrounding* (p. 73), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006b. Boston, MA: Prentice Hall。

Problem 5.3 Exploring Area and Circumference

- A.** Find as many different ways as you can to estimate the area of the pizzas. For each method, give your estimate for the area and describe how you found it.
- B.** Copy the table and record each pizza's size, diameter, radius, circumference, and area in a table.

Size	Diameter	Radius	Circumference	Area
Small	■	■	■	■
Medium	■	■	■	■
Large	■	■	■	■

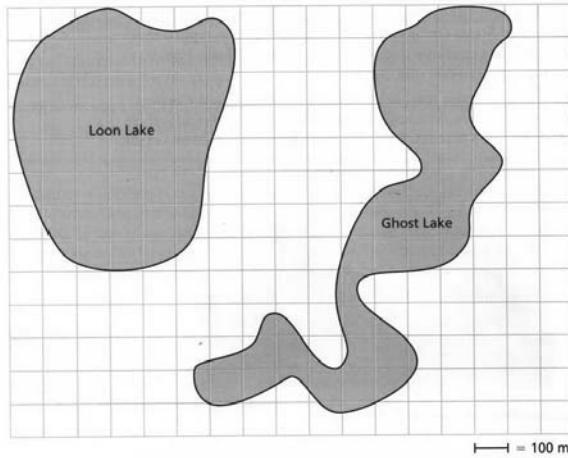
- C.** Examine the data in the table and your strategies for finding area. Describe any shortcuts that you found for finding the area of a circle.
- D.** In your opinion, should the owner of the pizzeria base the cost of a pizza on area or on circumference? Explain.

圖20. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Covering and surrounding* (p. 75), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006b. Boston, MA: Prentice Hall。



Problem 5.1 Estimating Perimeter and Area

Scale pictures for Loon Lake and Ghost Lake are on the grid.



- A.** Estimate the area and perimeter of Loon Lake and Ghost Lake.
- B.** Which lake is larger? Explain your reasoning.
- C.** Use your estimates to answer the questions. Explain your answers.
 - 1.** Naturalists claim that water birds need long shorelines for nesting and fishing. Which lake will better support water birds?
 - 2.** Sailboaters and waterskiers want a lake with room to cruise. Which lake works better for boating and skiing?
 - 3.** Which lake has more space for lakeside campsites?
 - 4.** Which lake is better for swimming, boating, and fishing? Which lake is better for the nature preserve?

圖21. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Covering and surrounding* (p. 71), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006b. Boston, MA: Prentice Hall。

Problem 4.2 Building Quadrilaterals

- A. 1.** Use polystrips to build quadrilaterals with each of the following sets of numbers as side lengths. Try to build two or more different quadrilaterals using the same set of side lengths.

6, 10, 15, 15	3, 5, 10, 20
8, 8, 10, 10	12, 20, 6, 9

Sketch and label your results to share with your classmates. Record any observations you make.

- 2.** Choose your own sets of four numbers and try to build quadrilaterals with those numbers as side lengths.

- B.** Use your observations from Question A.

- 1.** Is it possible to make a quadrilateral using any four side lengths? If not, how can you tell whether you can make a quadrilateral from four side lengths?

- 2.** Can you make two or more different quadrilaterals from the same four side lengths?

- 3.** What combinations of side lengths are needed to build rectangles? Squares? Parallelograms?

- C. 1.** Use four polystrips to build a quadrilateral. Press on the sides or corners of your quadrilateral. What happens?

- 2.** Use another polystrip to add a diagonal connecting a pair of opposite vertices. Now, press on the sides or corners of the quadrilateral. What happens? Explain.

- D. 1.** Describe the similarities and differences between what you learned about building triangles in Problem 4.1 and building quadrilaterals in this problem.

- 2.** Explain why triangles are used in building structures more often than quadrilaterals.

圖22. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Shapes and designs* (p. 72), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, & E. D. Phillips, 2006c. Boston, MA: Prentice Hall。

2. 教材內容充分引用生活情境之問題來提升學習動機

CMP 教材在引起學生學習動機方面，乃是充分引用與生活情境有關之問題，以此作為學習的切入點。此外，也會安排相關先備知識之探索，繼而進行問題解決。以「形狀與圖樣」(Shapes and Designs)單元為例，教材以生活中飛行員的故事作為測量誤差之引入(如圖 23)，隨即進行一連串之相關數學問題探究(如圖 24)，且佈題皆圍繞著此飛行員作為發展方向。又如八年級「畢氏定理」單元，該單元完全介紹畢氏定理之相關概念，而教材則在教學中安排畢達哥拉斯相關的先備知識作為延伸(如圖 25)，而後才進行學習問題的探究(如圖 26)。

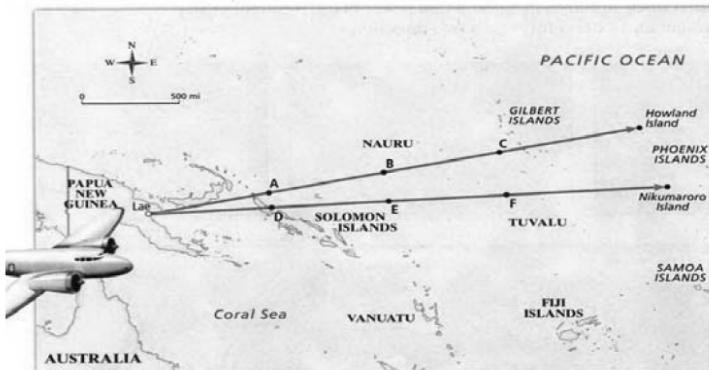
In 1937, the famous aviator Amelia Earhart tried to become the first woman to fly around the world. She began her journey on June 1 from Miami, Florida. She reached Lae, New Guinea, and then headed east toward Howland Island in the Pacific Ocean. She never arrived at Howland Island.

In 1992, 55 years later, investigators found evidence that Earhart had crashed on the deserted island of Nikumaroro, far off her intended course. It appears that an error may have been made in plotting Earhart's course.



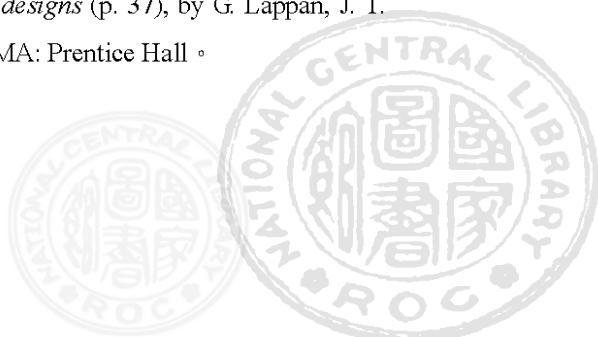
圖23. CMP教材例題。引自*Connected mathematics: Shapes and designs* (p. 36), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006c. Boston, MA: Prentice Hall。

The map below shows Lae, New Guinea; Howland Island (Earhart's intended destination); and Nikumaroro Island (the crash site).



- How many degrees off course was Earhart's crash site from her intended destination?
- Suppose two planes fly along the paths formed by the rays of the angle indicated on the map. Both planes leave Lae, New Guinea, at the same time and fly at the same speed. Find the approximate distance in miles between the planes at each pair of points labeled on the map (A and D, B and E, and C and F).
- Amelia Earhart apparently flew several degrees south of her intended course. Suppose you start at Lae, New Guinea, and are trying to reach Howland, but you fly 20° south. Where might you land?

圖24. CMP教材例題。引自*Connected mathematics: Shapes and designs* (p. 37), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006c. Boston, MA: Prentice Hall。



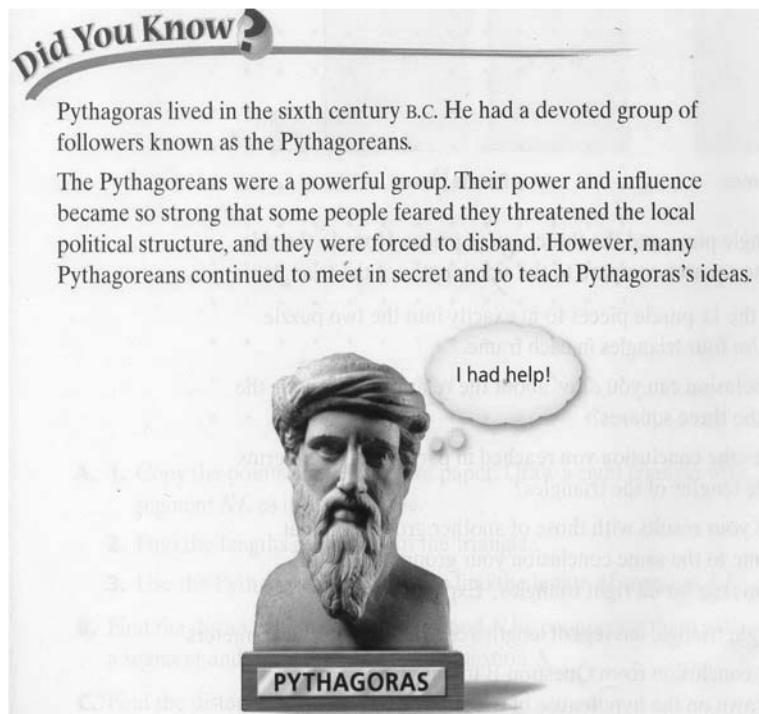
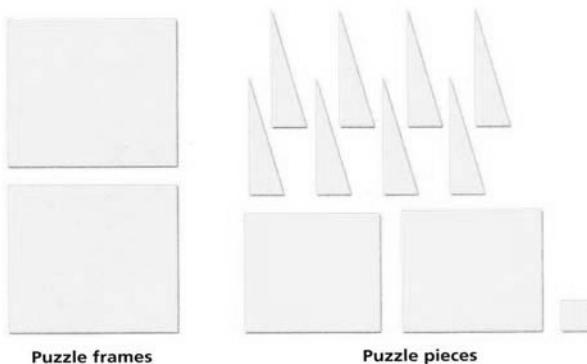


圖25. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Looking for Pythagoras* (p. 33), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006a. Boston, MA: Prentice Hall。

Problem 3.2 A Proof of the Pythagorean Theorem

Use the puzzles your teacher gives you.



- A. Study a triangle piece and the three square pieces. How do the side lengths of the squares compare to the side lengths of the triangle?
- B. 1. Arrange the 11 puzzle pieces to fit exactly into the two puzzle frames. Use four triangles in each frame.
2. What conclusion can you draw about the relationship among the areas of the three squares?
3. What does the conclusion you reached in part (2) mean in terms of the side lengths of the triangles?

圖26. CMP教材例題。引自 *Connected mathematics: Looking for Pythagoras* (p. 34), by G. Lappan, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Phillips, 2006a. Boston, MA: Prentice Hall。

3. 教材單元名稱與教學活動之間缺乏關聯性，單元間的脈絡編排不具連貫性

CMP 國中幾何教材共有六個單元，多數的單元名稱與其教學活動之間的相關性並不高，以八年級的「萬花筒、轂蓋、鏡子」(Kaleidoscopes, Hubcaps, and Mirrors) 單元最為明顯，特殊的名稱雖然容易引起學習者的好奇心，但也較無法從單元名稱中瞭解所欲學習的數學內容為何。另一方面，單元間的脈絡編排方式連貫性亦偏低，由六年級介紹幾何圖形的測量與相關性質，七年級則是相似圖形與柱體，而八年級則學習畢氏定理與對稱圖形，由此顯見其劃分方式乃是以概念主題之教學內容為其呈現方式。

(三) 新課程數學

1. 教材提供學習者多元的解題策略，並落實科技融入教學之培養

NSM 與 KH 在佈題之後皆有進行詳細的解題策略，而 NSM 在解題策略之另一特點，乃是提供學習者其他的解題方式。如圖 27 所示，乃是針對不同策略 (strategy 1 與 strategy 2) 進行問題之探討，而圖 28，則是使用兩種不同思考方向 (method 1 與 method 2) 進行問題解決，又如圖 29 之解題更是包含了三種策略，並於其後反問學習者何種方式較佳，以此提供學習者反芻與省思的機會。此外，新加坡政府於 2002 年推出資訊科技融入教育的規劃，期望能落實電腦輔助教學，且於中學數學課程綱要中更明定數學教育之目的乃是有效地利用各種數學工具在數學學習與應用上 (Ministry of Education in Singapore, n.d.)，而從教材中亦發現課程之規劃能適時的使用多媒體或工具 (如圖 30)，此乃顯示該教材對於科技融入教學之重視。

Example 12

In the figure, ABCD is a rectangle of length 24 cm and breadth 16 cm. Given that $CQ = PB = \frac{1}{2}PQ$, calculate the area of the trapezium PQRS.

Solution

Strategy 1: Use the formula

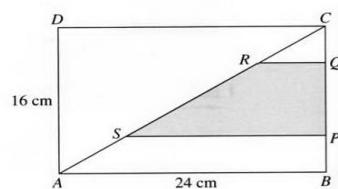
$$PQ = 8 \text{ cm}, RQ = \frac{1}{4}AB = 6 \text{ cm} \text{ and } SP = \frac{3}{4}AB = 18 \text{ cm}$$

Using the formula $\frac{1}{2} \times \text{height} \times \text{sum of parallel sides}$

= area of trapezium,

$$\text{area of } PQRS = \frac{1}{2} \times 8 \times (6 + 18)$$

$$= 96 \text{ cm}^2$$



Strategy 2: Draw a diagram

Divide the rectangle into 8 equal parts as shown. If we move the shaded triangle X onto Y, the total shaded area

is equal to $\frac{1}{4}$ of the big rectangle.

$$\therefore \text{area of } PQRS = \frac{1}{4} \times 16 \times 24$$

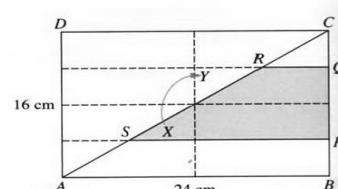


圖27. NSM教材例題。引自 New syllabus mathematics 1 (6th ed., p. 185), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007a. Singapore City, Singapore: Shinglee。



Example 3

Calculate the size of the interior angle of a regular decagon.



Method I

A regular decagon has 10 sides. Since the sum of all the exterior angles is 360° , each exterior angle
 $= \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Since the sum of the interior and exterior angles at any vertex is 180° , an interior angle
 $= 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Method II

Sum of the interior angles of a 10-sided polygon $= (10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ$,

$$\therefore \text{each interior angle} = \frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$$

圖28. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 1* (6th ed., p. 373), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007a. Singapore City, Singapore: Shinglee。

Example 5

Find the values of x and of y in the given triangle, giving your answer correct to 4 significant figures.



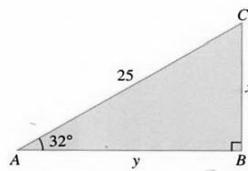
$$\cos B\hat{A}C = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 32^\circ = \frac{y}{25}$$

$$y = 25 \cos 32^\circ$$

$$\approx 21.201$$

$$= 21.20 \quad (\text{correct to 4 sig. fig.})$$



After we have obtained the value of y , the value of x can be found using three different methods.

Method I

$$\sin 32^\circ = \frac{x}{25}$$

$$x = 25 \sin 32^\circ$$

$$= 13.25 \quad (\text{correct to 4 sig. fig.})$$

Method II

$$\tan 32^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{21.201}$$

$$x = 21.201 \tan 32^\circ$$

$$= 13.25 \quad (\text{correct to 4 sig. fig.})$$

Method III

$$x^2 + y^2 = 25^2 \quad (\text{Pythagoras' theorem})$$

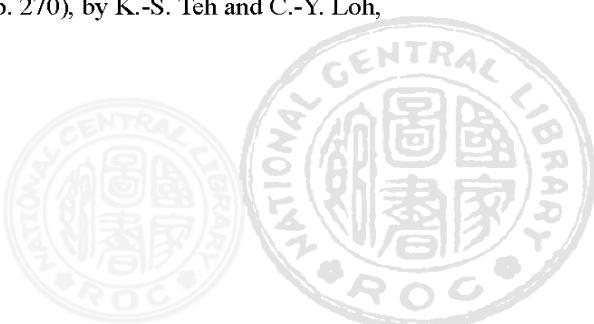
$$\therefore x^2 + 21.201^2 = 25^2$$

$$x^2 = 25^2 - 21.201^2 = 175.52$$

$$x = \sqrt{175.52} = 13.25 \quad (\text{correct to 4 sig. fig.})$$

Which method do you prefer? Why?

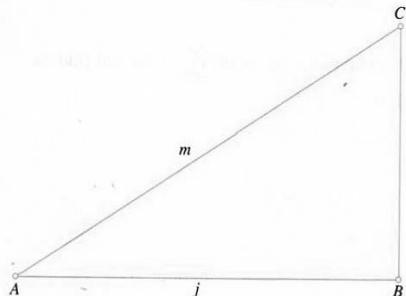
圖29. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 3* (6th ed., p. 270), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2008a. Singapore City, Singapore: Shinglee。



Use of IT open tool Geometers' Sketch Pad on Trigonometrical Ratios

$$\begin{aligned}AB &= 7.67 \text{ cm} & \angle BAC &= 32.3^\circ \\BC &= 4.84 \text{ cm} & \frac{BC}{AC} &= 0.53 \\AC &= 9.07 \text{ cm} & \frac{AB}{AC} &= 0.85 \\&& \frac{BC}{AB} &= 0.63\end{aligned}$$

$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	Angle A
0.61	0.80	0.76	37.31
0.42	0.91	0.46	24.80
0.23	0.97	0.24	13.38
0.53	0.85	0.63	32.25



1. Use to construct a line AB .
2. With on, click to select B and with the shift key on, click to select line AB and choose Perpendicular-line from Construct on the Menu bar to construct the line perpendicular to AB and through B .
3. Use to mark a point C on the line perpendicular to AB .
4. Select the perpendicular line with and choose Hide Line from Display on the Menu bar.
5. Use to join BC and AC .

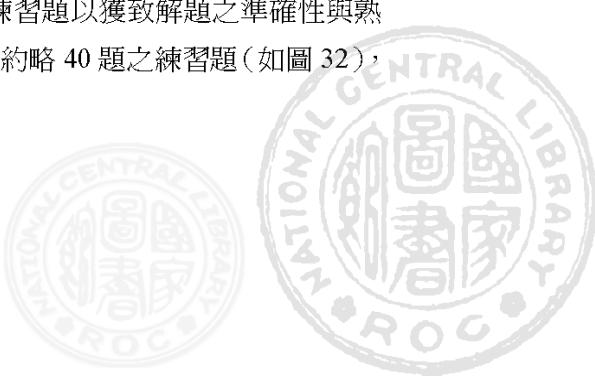
圖30. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 3* (6th ed., p. 265), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2008a. Singapore City, Singapore: Shinglee。

2. 教材佈題脈絡傾向螺旋式設計，且學習內容兼具深度與廣度

NSM 在國中幾何階段教材之安排方式，大致是由淺而深之方式編排，且佈題脈絡傾向於螺旋式設計。如七年級「體積與表面積」(Volume and Surface Area) 單元在八年級課程中有相同單元名稱出現，又如八年級「全等與相似」(Congruence and Similarity) 在九年級也有「全等與相似三角形」(Congruent and Similar Triangles) 單元之進階課程設計，此外，在所有課程內容之後，還安排「總複習」(Revision) 單元作為總結以產生較大之學習遷移。換言之，該教材在脈絡安排之方式，乃是將學習概念依難易程度與先後順序盤旋前進，使學生所經驗之學習內容能漸次加深與加廣。

3. 教材強調例題之練習與熟練性，以強化數學概念之學習

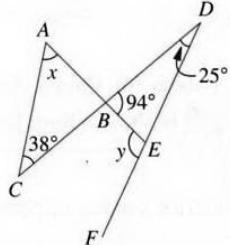
NSM 教材對於數學概念之學習，多是藉由大量問題之練習以增加概念之理解與熟練度，其編製方法乃是在數學概念教學後，引入許多同質性或應用練習題以獲致解題之準確性與熟練性。如圖 31 中之例題乃是主要概念之教學問題，其後則鋪陳約略 40 題之練習題（如圖 32），




Example 1

Find the unknown angles marked in each of the following diagrams:

(a)



(b)

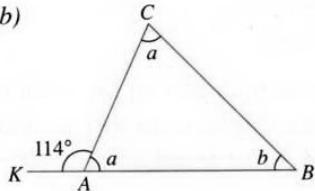


圖31. NSM教材例題。引自 *New syllabus mathematics 1* (6th ed., p. 361), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007a. Singapore City, Singapore: Shinglee。

顯見該教材對於熟練技巧之重視。研究者認為，運算之熟練度與流暢性固然重要，但教師於教學過程中若只強調此方面之技能，抑或唯命是從於教科書之引導模式，因而忽略學生學習過程中理解與否，則學生解題之結果，是對於概念之真正獲得，或只流於機械式之運算將不得而知。

上述分析顯示，三套教材在內容與脈絡編排上各有其特色與差異，CMP 提供非常豐富之真實情境問題於課程中，學生可透過題組中之問答方式理解其數學概念，且例題之後並不給予明確之算法，乃是為了留給學生自由發揮之空間，讓學生發展出自己的方法 (Cai et al., 2011; NCTM, 2000)。NSM 教材則偏向於讓學生從大量問題來熟練其數學概念，鞏固練習乃是其課程設計中非常重要的環節，透過眾多的例題練習使學生達到學習上的精熟，且教材於例題之後會列出明確之算則，雖然較為符合布魯姆之精熟原則，但卻不利喚起學生的學習興趣與動機 (NCTM, 2000)；相對而言，KH 教材中提供豐富之圖文設計，且能適切融入生活中之情境問題，重視運算能力的同時卻不以大量練習方式鞏固其計算能力。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 三套教材在幾何單元之總題數具顯著差異

三套教材在幾何單元之總題數具顯著差異性；美國 CMP 在教材單元總題數顯著高於臺灣 KH 與新加坡 NSM。此結果與 Reys 等 (2004) 的研究發現一致，美國數學教科書的內容數量是其他國家的二倍以上。



Exercise 15a

1. Sketch, in each case, a triangle ABC with the size of \hat{A} and \hat{B} given below. In each case, find \hat{C} and classify each triangle (i) by its sides (ii) by its angles:

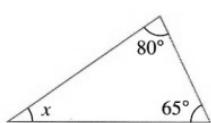
- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ | (b) $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ | (c) $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ |
| (d) $\hat{A} = 42^\circ$, $\hat{B} = 48^\circ$ | (e) $\hat{A} = 65^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ | (f) $\hat{A} = 25^\circ$, $\hat{B} = 112^\circ$ |

2. The following are base angles of isosceles triangles. In each case, find the third angle of the isosceles triangle:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (a) 42° | (b) 82° | (c) 18° | (d) 64° |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

3. Calculate the values of the unknown in each of the following diagrams:

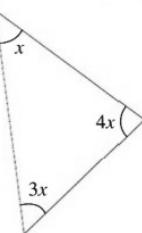
(a)



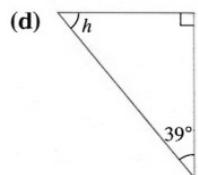
(b)



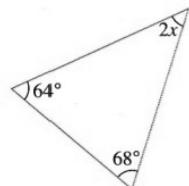
(c)



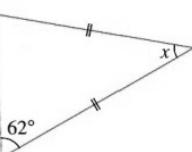
(d)



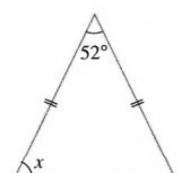
(e)



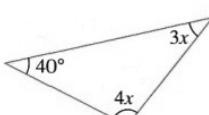
(f)



(g)

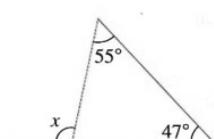


(h)

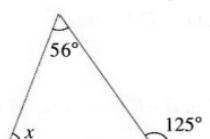


4. Calculate the values of the unknowns in the following diagrams.

(a)



(b)



(c)

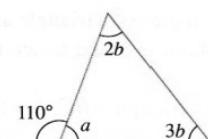


圖32. NSM教材例題。引自*New syllabus mathematics 1* (6th ed., p. 362), by K.-S. Teh and C.-Y. Loh, 2007a. Singapore City, Singapore: Shinglee。

(二) 佈題呈現方式與表徵型態差異

三套教科書在「開放型與封閉型問題」方面，臺灣 KH 與新加坡 NSM 之封閉型問題比例高達九成五以上，美國 CMP 有將近三分之二的問題屬封閉型問題。相較之下美國 CMP 有將近三分之一的問題屬開放型問題，此顯示 CMP 呼應 NCTM (2000) 課程標準的論點，強調開放式問題的呈現。教材若過度著重於封閉型問題，可能促使學生在解開放型問題能力上之不足。相關研究亦指出，教科書在開放型與封閉型問題之編排差異，使得學生缺乏從教科書中獲得較多學習開放型問題之經驗，因此將影響學生解開放型問題之能力 (Cai, 1995; Zhu & Fan, 2004, 2006)。與前述相似，Cai (1995)、Cifarelli 與 Cai (2005) 的研究即指出，若教科書編排過多的封閉型問題，學生解開放性問題的經驗不足，將使得學生在面對開放性問題時表現不佳。由此可知，教科書之開放型問題的佈題情形將影響學生學習開放型問題之機會，進而影響學生之解題表現。

在「數學符號型態、文字型態、視覺型態與聯合型態問題」方面，三版本在幾何教材的佈題表徵方式多仰賴「聯合型態問題」，其次則為「文字型態問題」，且兩者所涵蓋之比例極高，約略有七至八成左右。進一步比較「數學型態問題」與「視覺型態問題」兩者之分布情形，發現 KH 與 NSM 教材使用較多的數學型態問題，而 CMP 之佈題方式則剛好相反，且其「數學型態問題」之比重僅僅是 KH 的一半，NSM 的五分之一，這是否隱含著使用該教材之學生在學習數學抽象能力上的不足。Devetak 等 (2010) 在其研究中指出，教師身為教學的促進者，應注意學生所使用教科書中的問題與侷限性，因此，CMP 教材中對於「數學型態問題」之安排方式，恐導致學生對於此類型題目經驗上的不足。

(三) 編排內容各具特色

三套教材在內容之編排各有特色，KH 在抽象符號之使用上較為廣泛，且常以數學符號表徵方式來論述其題目，教材中對於公式之使用與運算能力之培養亦著墨甚多。此外，該教材於八年級的學期課程中引入了許多基本的幾何性質，更於九年級的課程中正式編製「幾何與證明」單元，讓學習者瞭解幾何推理的意義與其常用之書寫方式。整體而言，KH 之編排特色，乃是以循序漸進的方式為原則，提供豐富且多樣之圖文設計，並能適時引入相關數學故事或概念。

CMP 在佈題的安排方式並不注重公式之使用，且不以大量同質性問題使學生熟悉某個數學概念，而是改以提問的方式引導學生能說明或描述其解題策略與過程。其內容是以較多之真實生活情境問題來作為學習之引發，同時以較多之文字來陳述其題目。

NSM 在許多面向與 KH 之編製方式十分雷同，且更為強調公式之運用與計算能力之訓練，教材中亦發現課程之規劃適時地融入多媒體或工具之使用。而教材之佈題方式則習慣出現重複性與相似度較高之例題，以增加公式之熟悉度，並使用大量的練習題來強化數學概念之學

習。整體而言，NSM 之編排特色，乃是強調例題之練習與熟練性，教材提供學習者多元的解題策略，並能配合學生學習內容以融入多媒體或計算工具的使用，此外，教材內容之脈絡編排則傾向於螺旋式設計，使得學習之內容能同時兼具深度與廣度。

整體而言，透過跨國教科書的比較與分析，不但可以提供讀者瞭解不同國家之數學教科書教材內容之差異情形，如教材內容之編排順序、題數、佈題方式與表徵方式之差異，以及各國教材之特色為何；同時可以作為未來教師改進教材與教學參考之依據，亦可作為未來教科書修訂之依據。

二、建議

(一)研究指出開放型問題有助於概念性之理解與解題能力之發展(Cai et al., 2013; Cai et al., 2011)，學生若缺乏學習開放型問題的機會，將影響學生未來解相關問題的能力(Cai, 1995; Cifarelli & Cai, 2005; Zhu & Fan, 2006)。本研究發現臺灣 KH 在開放型問題之佈題上只有 3.1%，遠低於美國 CMP 之 33.1%。而且 KH 在此類問題之呈現皆聚焦於作圖題，較缺少如 CMP 所設計從問題探索中發展數學概念之題型。為提升我國學生概念性理解與解題能力，未來數學教科書應增加開放型問題之設計，以提供更多解相關問題之學習機會。

(二)美國 CMP 充分將真實情境融入數學問題內，較能引發學生之學習動機，且強調數學概念之理解；而新加坡 NSM 內容重視科技融入教學之素養，皆為國內未來課程設計或修正值得借鏡之處。

(三)未來可進行跨國性研究以探討使用該教科書之學生學習表現情形為何？以及教師使用該套教科書之實踐情形為何？以作為未來教科書編修之參考依據。

誌謝

本研究蒙科技部專題計畫補助（計畫編號：MOST102-2511-S-415-002-MY3），特誌申謝。文中所提論點純屬研究者個人意見，並不代表科技部立場。研究者衷心感謝總編輯與審查委員對本研究所提供之寶貴意見，由於各位的協助，方能使本研究以最佳的方式呈現。



參考文獻

一、中文文獻

- 左台益、梁勇能（2001）。國二學生空間能能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報：科學教育類，46（1, 2），1-20。doi:10.6300/JNTNU.2001.46.01
【Tso, T.-Y., & Liang, Y.-N. (2001). The study of interrelationship between spatial abilities and van Hiele levels of thinking in geometry of eighth-grade students. *Journal of National Taiwan Normal University: Science Education*, 46(1, 2), 1-20. doi:10.6300/JNTNU.2001.46.01】
- 吳德邦、馬秀蘭、藍同利（2006）。小青的三角形概念—從 Duval 理論的觀點探究一位國小五年級視覺型兒童之個案研究。科學教育研究與發展季刊，42，78-116。
【Wu, D.-B., Ma, S.-L., & Lan, T.-L. (2006). A study of the cognitive development of visual type child on triangle conception in geometry—Analysis from the viewpoint of duval theory. *Research and Development in Science Education*, 42, 78-116.】
- 徐偉民、林美如（2009）。台灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。彰化師大教育學報，16，49-75。
【Shiu, W.-M., & Lin, M.-R. (2009). The content analysis of geometry material in the elementary mathematic textbooks of Taiwan, Chinese and Hong Kong. *Journal of Education National Changhua University of Education*, 16, 49-75.】
- 康軒文教事業（主編）（2009a）。康軒國中數學課本（第三冊）。臺北市：康軒文教集團。
【Kang Hsuan Educational Publishing Group. (Ed.). (2009a). *KH middle school mathematics textbooks* (Vol. III). Taipei, Taiwan: Author.】
- 康軒文教事業（主編）（2009b）。康軒國中數學課本（第四冊）。臺北市：康軒文教集團。
【Kang Hsuan Educational Publishing Group. (Ed.). (2009a). *KH middle school mathematics textbooks* (Vol. IV). Taipei, Taiwan: Author.】
- 康軒文教事業（主編）（2009c）。康軒國中數學課本（第五冊）。臺北市：康軒文教集團。
【Kang Hsuan Educational Publishing Group. (Ed.). (2009a). *KH middle school mathematics textbooks* (Vol. V). Taipei, Taiwan: Author.】
- 張守波（2011）。新加坡中學數學教材的特色與啟示。外國中小學教育，4，31-35。
【Chang, S.-P. (2011). Characteristics and enlightenment of mathematics textbook in Singapore junior high school. *Elementary & Secondary Schooling Abroad*, 4, 31-35.】
- 張奠宙（2007）。中華文化對今日數學教育之影響。基礎教育學報，6（1），45-55。
【Zhang, D.-Z. (2007). The affect of Chinese culture to current mathematics education. *Journal of Basic Education*, 6(1), 45-55.】
- 教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域修正草案對照表。臺北市：作者。
【Ministry of Education. (2008). *Mathematics fields of study draft amendments table in general guidelines of grade 1-9 curriculum of elementary and junior high school education*. Taipei, Taiwan: Author.】
- 陳仁輝、楊德清（2010）。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。科學教育學刊，18（1），43-61。



【Chen, R.-H., & Yang, D.-C. (2010). Comparing 7th grade algebra textbooks used in Taiwan, U.S.A. and Singapore. *Chinese Journal of Science Education*, 18(1), 43-61.】

陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。臺北市：教育部。

【Chen, I.-L., Shan, W.-C., Hong, W.-S., & Yuan, Y. (2005). *The study for assessment and development mathematics curriculum syllabus of elementary and junior high school education*. Taipei, Taiwan: Ministry of Education.】

黃光雄、簡茂發（1993）。教育研究法。臺北市：師大書苑。

【Huang, K.-H., & Jian, M.-F. (1993). *Methods for educational research*. Taipei, Taiwan: Lucky Book Store.】

楊德清、陳仁輝（2011）。台灣、美國和新加坡三個七年級代數課程發展學生數學能力方式之研究。*科學教育學刊*, 19 (1), 43-61。

【Yang, D.-C., & Chen, R.-H. (2011). A study of the methods for developing 7th-graders' mathematical ability in selected algebra textbooks from Taiwan, U.S.A. and Singapore. *Chinese Journal of Science Education*, 19(1), 43-61.】

楊龍立（1994）。科學教育理念之影響因素的探討。*初等教育學刊*, 3, 315-331。

【Yang, L.-L. (1994). To investigate the factors affecting educational philosophy of science. *Journal of Elementary Education*, 3, 315-331.】

廖雅玉（2010，3月2日）。「小四課本反光」康軒教材爆爭議。**TVBS 新聞**。取自
<http://news.tvbs.com.tw/entry/84254>

【Lia, Y.-Y. (2010, March 2). Grade 4 students' textbooks reflective. Kang Hsuan textbooks had explosive controversy. *TVBS News*. Retrieved from <http://news.tvbs.com.tw/entry/84254>】

謝佩珍（2009）。台灣與中國國中數學教科書之內容分析研究（未出版碩士論文）。國立政治大學，臺北市。

【Shieh, P.-C. (2009). *The content analysis of junior high mathematics textbooks in Taiwan and China* (Unpublished master's thesis). National Chengchi University, Taipei, Taiwan.】

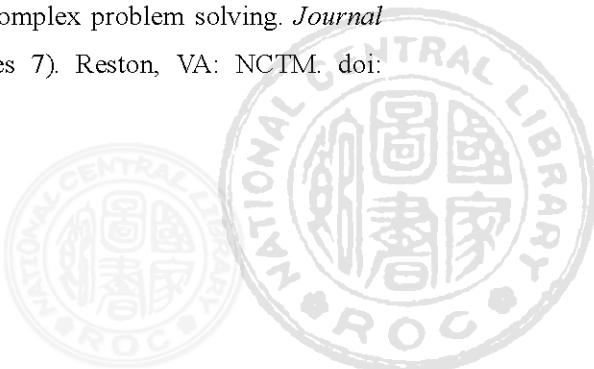
二、外文文獻

Biggs, J. B. (1996). Western misconceptions of the Confucian-heritage learning culture. In D. A. Watkins & J. B. Biggs (Eds.), *The Chinese learner: Cultural psychological and contextual influence* (pp. 45-68). Hong Kong, China: Comparative Education Research Centre.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H., & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541-557. doi:10.2307/749773

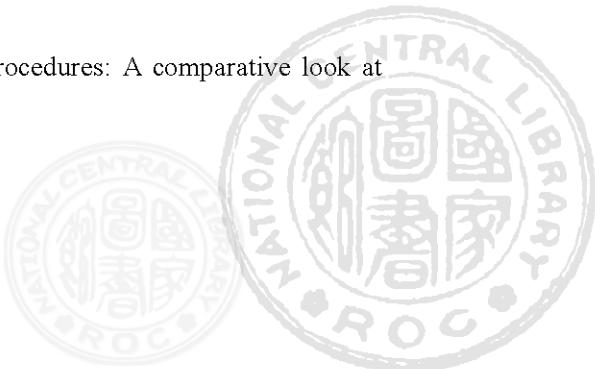
Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48. doi:10.2307/749317

Cai, J. (1995). A cognitive analysis of U.S. and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving, and complex problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education* (Monograph series 7). Reston, VA: NCTM. doi:

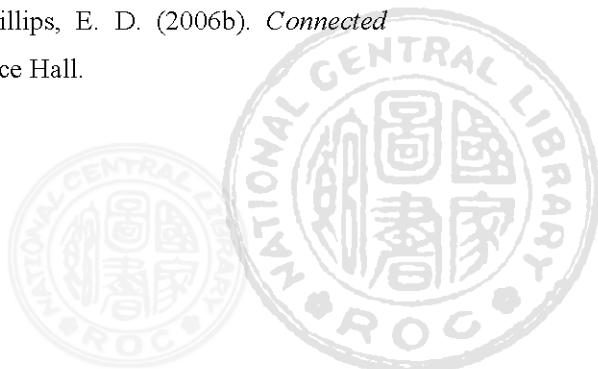


10.2307/749940

- Cai, J. (2001). Improving mathematics learning: Lessons from cross-national studies of U.S. and Chinese students. *Phi Delta Kappan*, 82(5), 400-404. doi:10.1177/003172170108200511
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 57-69. doi:10.1007/s10649-012-9429-3
- Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal project in United States. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 117-136. doi:10.1016/j.ijer.2011.06.006
- Cain, J. S. (2002). An evaluation of the connected mathematics project. *The Journal of Educational Research*, 95(4), 224-233. doi:10.1080/00220670209596595
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151. doi:10.1080/10986060903460070
- Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 302-324. doi:10.1016/j.jmathb.2005.09.007
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: Macmillan.
- Connected Mathematics Program. (2009). *Connected mathematics project*. Retrieved from <http://connectedmath.msu.edu/>
- Devetak, I., Vogrinč, J., & Glažar, S. (2010). States of matter explanations in Slovenian textbooks for students aged 6 to 14. *International Journal of Environmental and Science Education*, 5(2), 217-235.
- Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of the distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(2), 146-180. doi:10.1080/07370001003638553
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-127). Berlin, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-57771-0_10
- Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at



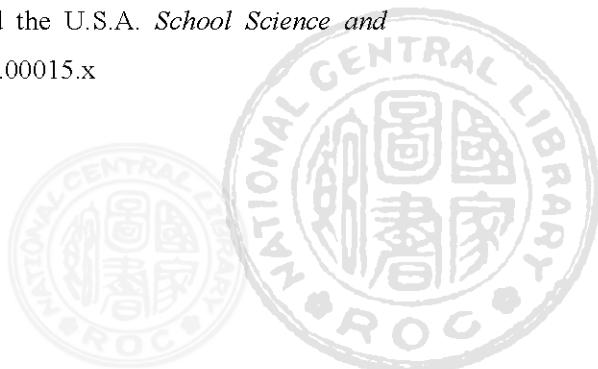
- China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75. doi:10.1007/s10649-006-9069-6
- Fan, L., Zhu, F., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x
- Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T., & Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system (and what Singapore can learn from the United States): An exploratory study*. Retrieved from ERIC database. (ED491632)
- Hall, P. P. (2009). *Guiding principle: Student learning: Rationale for a problem centered curriculum*. Retrieved from <http://connectedmath.msu.edu/>
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "Voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- Herbel-Eisenmann, B. A., & Wagner, D. (2005). *In the middle of nowhere: How a textbook can position the mathematics learner*. Retrieved from ERIC database. (ED496900)
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., & Jacobs, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Hong, D. S., & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: The case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 241-263. doi:10.1007/s10649-013-9512-4
- Huang, R., & Cai, J. (2011). Pedagogical representations to teach linear relations in Chinese and U.S. classrooms: Parallel or hierarchical? *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 149-165. doi:10.1016/j.jmathb.2011.01.003
- Jones, K. (2010). Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. In Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference* (pp. 203-215). Charlotte, NC: Information Age.
- Kim, O.-K. (2007). *Teacher knowledge and curriculum use*. Retrieved from http://citation.allacademic.com//meta/p_mla_apa_research_citation/1/9/4/6/5/pages194653/p194653-1.php
- Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., & Phillips, E. D. (2006a). *Connected mathematics: Looking for Pythagoras*. Boston, MA: Prentice Hall.
- Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., & Phillips, E. D. (2006b). *Connected mathematics: Covering and surrounding*. Boston, MA: Prentice Hall.



- Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., & Phillips, E. D. (2006c). *Connected mathematics: Shapes and designs*. Boston, MA: Prentice Hall.
- Leung, F. K.-S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1), 35-51. doi:10.1023/A:1017936429620
- Leung, F. K.-S. (2006). Mathematics education in East Asia and the West: Does culture matter? *Mathematics education in different cultural traditions—A comparative study of east asia and the west* (pp. 21-46). New York, NY: Springer. doi:10.1007/0-387-29723-5_2
- Li, Y. (2000). A comparison problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234-241. doi:10.2307/749754
- Marascuilo, L. A. (1966). Large-sample multiple comparisons. *Psychological Bulletin*, 65(5), 280-290. doi:10.1037/h0023189
- Michael, N. (2002, October). *Inside the PISA: Comparing two high achieving countries from the west (Finland) and from the east (Japan)*. Paper presented in the ICMI Comparative Study Conference 2002, Hong Kong, China.
- Ministry of Education in Singapore. (n.d.). *Secondary education*. Retrieved from <http://www.moe.gov.sg/education/secondary>
- Mullis, I., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2010). *PISA 2006 science competencies for tomorrow's world*. Retrieved from <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf>
- Park, K., & Leung, F. K.-S. (2006). A comparative study of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and the United States. In F. K.-S. Leung, K. D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions—A comparative study of East Asia and the West (New ICMI Study Series)* (pp. 227-238). New York, NY: Springer. doi:10.1007/0-387-29723-5_14
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.
- Rivette, K., Grant, Y., Ludema, H., & Rickard, A. (2003). *Connected mathematics project: Research*



- and evaluation summary*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
- SGBox. (2009). *New syllabus math for 7th grade/secondary 1 package: Product benefits*. Retrieved from <http://www.sgbox.com/slnsm.html>
- Show-Me Center. (2002). *CMP implementation map*. Retrieved from <http://www.math.msu.edu/cmp/Overview/ImplementationMap.htm>
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics* (2nd ed.). Harmondsworth, UK: Penguin.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational Leadership*, 61(5), 12-17.
- Tarr, J. E., Reys, B. J., Barker, D. D., & Billstein, R. (2006). Selecting high quality mathematics textbooks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(1), 50-54.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. (2008). The impact of middle grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.
- Teh, K.-S., & Loh, C.-Y. (2007a). *New syllabus mathematics 1* (6th ed.). Singapore City, Singapore: Shinglee.
- Teh, K.-S., & Loh, C.-Y. (2007b). *New syllabus mathematics 2* (6th ed.). Singapore City, Singapore: Shinglee.
- Teh, K.-S., & Loh, C.-Y. (2008a). *New syllabus mathematics 3* (6th ed.). Singapore City, Singapore: Shinglee.
- Teh, K.-S., & Loh, C.-Y. (2008b). *New syllabus mathematics 4* (6th ed.). Singapore City, Singapore: Shinglee.
- Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 11-20). Utrecht, the Netherlands: CD-b Press/Freudenthal Institute, Utrecht University.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Yang, D.-C., Reys, R. E., & Wu, L.-L. (2010). Comparing the development of fractions in the fifth-and-sixth grades' textbook of Singapore, Taiwan, and the U.S.A. *School Science and Mathematics*, 110(3), 118-127. doi:10.1111/j.1949-8594.2010.00015.x



- Yang, D.-C., & Wu, W.-R. (2010). The study of number sense: Realistic activities integrated into third-grade math classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 103(6), 379-392. doi:10.1080/00220670903383010
- Zhu, Y., & Fan, L. (2004, July). *An analysis of the representation of problem types in Chinese and US mathematics textbooks*. Paper presented at the ICME-10 Discussion Group, Copenhagen, Denmark.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626. doi:10.1007/s10763-006-9036-9



Journal of Research in Education Sciences
2015, 60(1), 33-72
doi:10.6209/JORIES.2015.60(1).02

Geometry Content of Middle School Textbooks in Taiwan, the United States, and Singapore

Der-Ching Yang

Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Chiayi University

Ting-Yun Cheng

Chiayi City Pei Shin Public Junior High School

Abstract

This study applied the content analysis method to compare the differences in the geometry problems, problem-posing methods, representational types, and characteristics of geometry content of middle school mathematics textbooks among Kang Hsuan (KH) in Taiwan, Connected Mathematics Program (CMP) in the United States, and New Syllabus Mathematics (NSM) in Singapore. The results reveal significant differences in the total geometry problems and problem-posing methods among the three textbooks. The CMP included approximately one-third open-ended problems; however, the KH and NSM textbooks included more than 95% closed-ended problems. Regarding representation types, all three textbooks presented combined problems and verbal problems. In addition, the results show that the three textbooks have different characteristics. The findings of this study can serve as a reference for designing mathematics textbooks in the future.

Keywords: middle school, Connected Mathematics Program, geometry, New Syllabus Mathematics

Corresponding Author: Der-Ching Yang, E-mail: dcyang@mail.nctu.edu.tw

Manuscript received: Dec. 5, 2013; Revised: Mar. 27, 2014, Jul. 16, 2014; Accepted: Nov. 22, 2014.

