

六軸史都華平台致動腳之參考模式設計

The Reference Model Design for the Actuation Leg of Stewart Platform

魏榮輝^{*} 徐博詩
Jong-Hwei Wei^{*}, Po-Shih Hsu

摘要

本文以六軸史都華平台的逆向運動學理論配合PID控制器及Matlab/Simulink軟體建立一個用於採用適應性控制法則的史都華平台致動腳之參考模式，以改善史都華平台致動腳閉迴路控制之性能，其目的希望史都華平台致動腳在史都華平台姿態變動時，可以利用適應性控制法則使六個致動腳追蹤參考模式，令史都華平台獲得精確且快速穩定之反應。本文建構之參考模式係具PID控制器之閉迴路控制系統，使史都華平台致動腳之控制性能（暫態響應之最大超越量與上升時間與穩態響應之穩態誤差）達到所需規格。

關鍵詞：史都華平台，參考模式，逆向運動學

Abstract

In this paper, the inverse kinematics of the Stewart platform with the Matlab/Simulink software are used to derive the reference input of the reference model. The reference model of the actuation leg of Stewart platform is chosen to improve the uncertainty of the classical PID controller under the disturbances. The goal of the actuation leg of Stewart platform is that the system has the faster and more stable response when the controlled system can be followed the reference model. The reference model of the actuation leg of Stewart platform is chosen as a closed-loop system with PID compensator to achieve the requirement performances of control system, for example, the transient responses (the maximum overshoot and the rise time) and the steady-state response (steady-state error).

Keywords: stewart platform, reference model, inverse kinematics

I. 導論

六軸史都華平台(Stewart Platform)最初設計目的為提供安全操控環境，避免人員的傷亡以降低實地訓練成本，其應用範圍相當廣泛，隨不同應用目的，附加不同軟硬體設備如：1.座艙系統；2.影像聲音訊號處理系統；3.相關周邊儀表操控設備；4.專業控制軟體；5.機密感測儀器，即可成為各類模擬器，以達到仿真環境訓練目的，其架構於1965年由英國人Stewart所提出，由固定基礎平台(Base)與可動平台(Platform)及六個可伸縮之連桿所構成之封閉式工作平台作為飛行模擬系統[1]。Stewart Platform比傳統的平台有較多的腳長，但比較於傳統的串聯式操作(serial manipulator)具有更高的力重比(force-to-weight ratio)、剛性(stiffness)和位置控制精度，因此具有極高的應用潛力，並且被廣泛的研究與應

用於各種領域，例：運動姿態、工作空間分析、奇異點位置分析等方面發展。1983年，Humt[2]針對他所提出的平行機構作運動學分析。1984年Yang和Lee[3]致力於六軸平台的逆向運動學分析，並且對於工作空間有所研究。1988年Do和Yang[4]以剛體逆向動力學分析的方式，來研究六軸平台之動態分析，並探討實際設計的問題。1997年陳信豪[5]進行單軸液壓缸之致動器分析，並應用強健控制器作控制。

史都華平台的六個可伸縮連桿（統稱致動腳）乃分別由六個伺服致動器驅動其長度變化，造成平台之空間運動。而六自由度之運動，分別為 X、Y、Z 三方向之位移(Translation)及姿態之旋轉(Roll) α 、俯仰(Pitch) β 與偏航(Yaw) γ ，其係由逆向運動計算器將此六自由度姿態轉換為六個致動腳之長度，再經由史都華機構轉換得到平台之姿態。圖 1 表示史都華平台六個液壓致動器

崑山科技大學機械工程系

*Corresponding author. E-mail: jhwei@mail.ksu.edu.tw

Department of Mechanical Engineering, College of Engineering Kun Shan University, Yung-Kang, Taiwan 71003, R.O.C.

Manuscript received 9 November 2006; revised 6 March 2007; accepted 20 March 2007



腳之 Multi-CPU 控制架構[6]，其採模組化設計，即史都華平台之六個致動腳將各自擁有單獨 CPU 以執行各自之伺服控制，而此六個伺服致動器聽命於主控制器（或稱運動姿態計算器）。

當應用模式參考型適應性控制理論 (Model Reference Adaptive Control Theory) 於六軸史都華平台致動腳時，需設計一個參考模式作為控制對象 (Control Plant) 的跟隨依據 [7,8]。故本文首先利用六軸史都華平台的逆向運動學理論 [9]，配合 Matlab/Simulink 軟體模擬碎石路面戰甲車運動軌跡姿態 [10]，求得路面運動軌跡轉換成六軸伸長量之運動軌跡做為六個致動腳的參考輸入，如圖 1 所示。本文重點在於建構史都華平台致動腳之參考模式，規劃史都華平台致動腳之理想閉迴路控制性能，以達到需求的性能，例如：史都華平台動態性能的六軸致動腳伸長量的暫態規格：最大超越量必須為 0%，使得平台無振動現象，而上升時間則需儘量的快，以求快速達到目標值。另穩態規格則需使其追蹤誤差（穩態誤差）儘可能的小。若暫態反應太快或太慢，造成控制系統反應不佳，則需重新選擇阻尼比 ζ 、自然頻率 ω_n 、PID 參數值等，使系統的暫態響應能符合性能需求。

II. 史都華平台之運動學

本章節討論史都華平台運動學分析，計算上平台中心座標與致動腳之數學關係式，以規劃平台欲跟隨運動軌跡路徑轉換成六個致動腳的伸長量，進而達到六軸運動平台姿態路徑跟隨的目的。

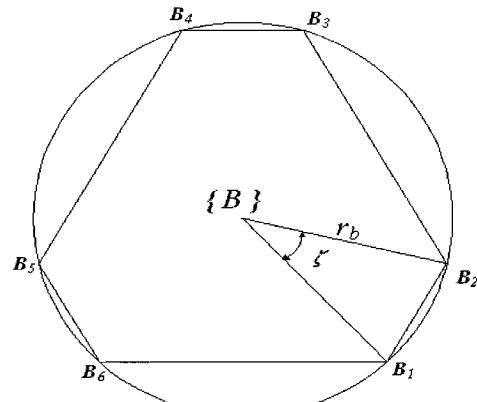
1. 座標轉換

為了分析平台空間運動，將定義兩個座標系統

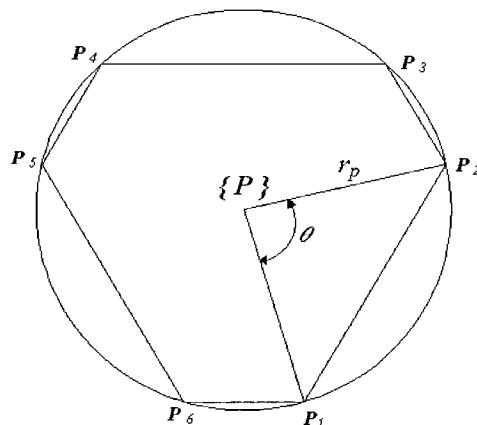
- 1-1. 固定基礎平台 (Base plane) 中間點為 $\{B\}xyz$
- 1-2. 可動平台 (Platform) 中心點為 $\{P\}xyz$

六個致動腳與上平台的連接點為位置 P_1 至 P_6 ，以座標系統 $\{P\}$ 表示；而六個致動腳與固定下平台連接點位置為 B_1 至 B_6 ，以座標系統 $\{B\}$ 表示。 B_i 至 P_i 的距離

$|B_i P_i|$ 即為各致動器的長度 l_i ， $i = 1 \sim 6$ ，如圖 2 所示。



(a) 下平板與座標 $\{B\}$ 中心夾角



(b) 上平板與座標 $\{P\}$ 中心夾角

圖 2 平台架構圖

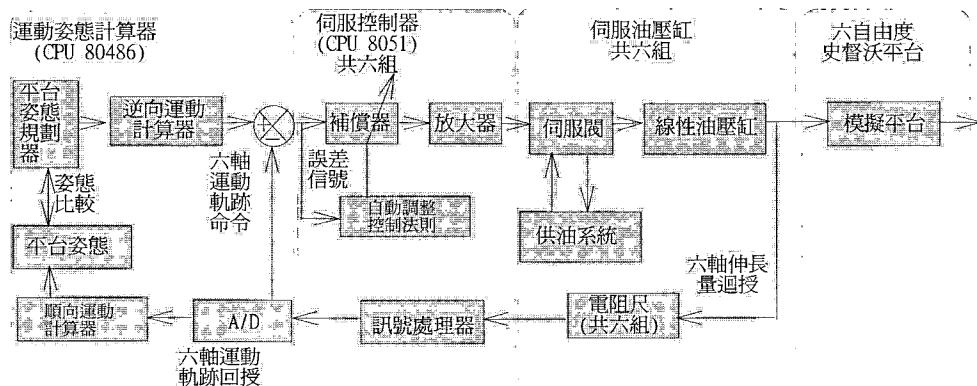


圖 1 六軸史都華平台採用之 Multi-CPU 架構 [6]



上下平台皆為半對稱六邊形，其端點座標以下列的數學關係式所示：

$$\begin{aligned} B_i &= [r_B \times \cos[(60^\circ \times i - \frac{\zeta}{2})] \quad r_B \times \sin[(60^\circ \times i - \frac{\zeta}{2})] \quad 0]^T \\ &= [B_{ix} \quad B_{iy} \quad B_{iz}]^T \\ P_i &= [r_p \times \cos[(60^\circ \times i - \frac{\theta}{2})] \quad r_p \times \sin[(60^\circ \times i - \frac{\theta}{2})] \quad 0]^T \\ &= [P_{ix} \quad P_{iy} \quad P_{iz}]^T, \text{ for } i = 1, 3, 5 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B_i &= [r_B \times \cos[(60^\circ \times i + \frac{\zeta}{2})] \quad r_B \times \sin[(60^\circ \times i + \frac{\zeta}{2})] \quad 0]^T \\ &= [B_{ix} \quad B_{iy} \quad B_{iz}]^T \\ P_i &= [r_p \times \cos[(60^\circ \times i + \frac{\theta}{2})] \quad r_p \times \sin[(60^\circ \times i + \frac{\theta}{2})] \quad 0]^T \\ &= [P_{ix} \quad P_{iy} \quad P_{iz}]^T, \text{ for } i = 2, 4, 6 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 ζ 為 B_1 與 B_2 與座標系統 $\{B\}$ 中心點所成的夾角，單位為角度。

θ 為 P_1 與 P_2 與座標系統 $\{P\}$ 中心點所成的夾角，單位為角度。 r_B 與 r_p 則分別為固定平台與可動平台的半徑，單位為公釐。

2. 逆向運動學

逆向運動學 (Inverse Kinematics) 指給定機械臂末端方位後，計算出各致動器將上平台六自由度轉換成六軸作動的旋轉角或伸長量，以求得平台六自由度與六軸相對應的關係式。

史都華平台之逆向運動學推導可分為兩部份，首先將 P_1 至 P_6 的座標轉換為以座標系 $\{B\}$ 表示，接著再經由簡單的向量運算即可得各個致動器的長度 $|B_i P_i|$ 如圖 3 所示，其向量關係式如下：

$$\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{O_B O_p} + R_p^B \cdot \overrightarrow{O_p P_i} - \overrightarrow{O_B B_i}, \text{ for } i = 1 \sim 6 \quad (3)$$

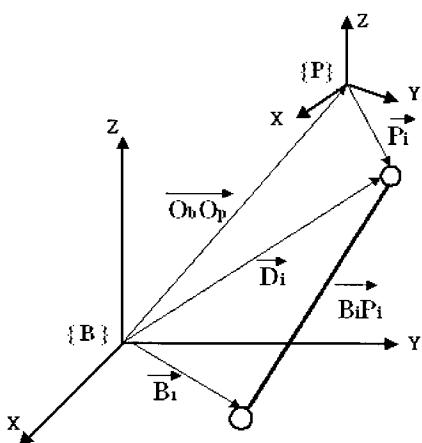


圖 3 六軸平台單軸示意圖

其中可動平台的平移量 (x, y, z) 即為 $\overrightarrow{O_B O_p}$ ， R 為旋轉矩陣與可動平台的旋轉量 (α, β, γ) 有關，其推導過程為先將座標系 $\{P\}$ 依序對座標系 $\{B\}$ 的 X、Y、Z 軸旋轉 α, β, γ 角度，產生三軸之 Roll、Pitch、Yaw 之運動。其結果簡列如下：

$$\begin{aligned} R_p^B &= R_{zy} \cdot R_{yx} \cdot R_{xa} \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\beta \cdot c\gamma & s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma - c\alpha \cdot s\gamma & c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma + s\alpha \cdot s\gamma \\ c\beta \cdot s\gamma & s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma + c\alpha \cdot c\gamma & c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma - s\alpha \cdot c\gamma \\ -s\beta & s\alpha \cdot c\beta & c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s\alpha &= \sin \alpha, \quad s\beta = \sin \beta, \quad s\gamma = \sin \gamma \\ c\alpha &= \cos \alpha, \quad c\beta = \cos \beta, \quad c\gamma = \cos \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

最後將上式整理即可得到六軸平台逆向運動學的完整解 (closed-form solution)，如式(5)所示。

$$\begin{aligned} l_i^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + R_p^2 + R_B^2 \\ &\quad + 2(r_{11}P_{ix} + r_{12}P_{iy})(x - B_{ix}) \\ &\quad + 2(r_{21}P_{ix} + r_{22}P_{iy})(y - B_{iy}) \\ &\quad + 2(r_{31}P_{ix} + r_{32}P_{iy})z - 2(x \cdot B_{ix} + y \cdot B_{iy}) \\ \text{for } i &= 1 \sim 6 \end{aligned} \quad (5)$$

其在 MATLAB/SIMULINK 軟體下實現逆向運動學，模擬方塊圖如圖 4 所示[11]。左端之 1, 2, ..., 6 代號為平台六種運動姿態輸入位置，此圖之[A]方塊為史都華平台運動姿態轉換為致動腳的空間向量，[B]方塊為史都華平台運動中，因非線性干擾誤差對致動器腳增益值的補償向量。而 [Leg Length 1-6] 方塊為利用平台空間姿態向量，經由逆向運動學轉換與增益補償，計算求得知六個致動腳伸長量所需的參考輸入 $Y(t)$ 。[Create desired position matrix] 方塊則將各致動腳伸長量，結合一起，不具有運算功能。

III. 史都華平台致動腳之參考模式選定

當應用模式參考型適應性控制理論 (Model Reference Adaptive Control Theory) 於六軸史都華平台致動腳時，需設計一個參考模式作為控制對象 (Control Plant) 的跟隨依據。故本文首先規劃控制系統的閉迴路。

性能，其中參考模型的輸出響應 $y_m(t)$ 直接表示系統希望之動態響應，所以參考模型則相當於輸出期望響應之的理想依據，可以直接達到需求的性能，包括穩定性，暫態響應（如最大超越量與安定時間）與穩態響應（如穩態誤差）等，如圖 5 所示。

圖 5 之參考模式方塊係具 PID 控制器之標準二階閉

迴路控制系統，使史都華平台致動腳之控制性能（暫態響應之最大超越量與上升時間與穩態響應之穩態誤差）達到所需規格。其選擇主要依據係標準二階閉迴路控制系統為型式-1(Type-1)系統，對於階級輸入信號，其穩態誤差為零，可滿足規格需求，而至於動態規格則可由所選參考模式之阻尼比 ζ 及自然頻率 ω_n 所決定，此方法

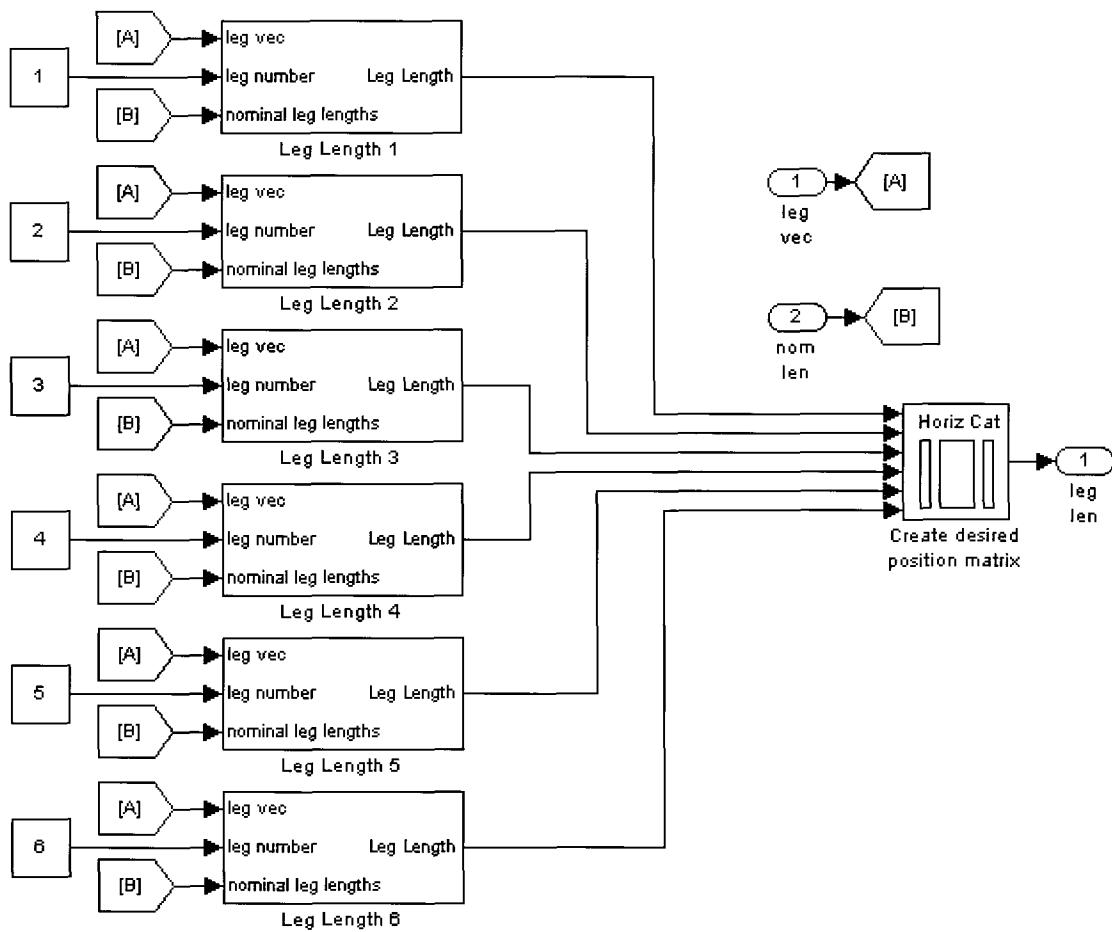


圖 4 逆向運動學方塊圖

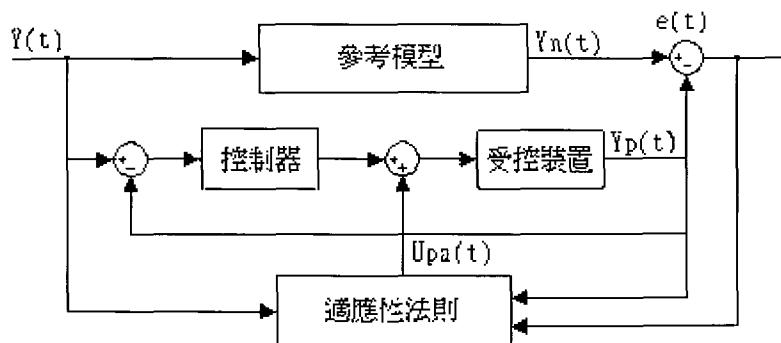


圖 5 參考模型適應控制結構圖



可提供設計者相當有用的準則。故參考模式之閉迴路轉移函數可選為：

$$\frac{Y_m(s)}{M(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s} \quad (6)$$

其中 $Y_m(s)$ 為參考模型之輸出， $M(s)$ 為 PID 控制器補償後之引動信號。 ζ 、 ω_n 分別為參考模式之阻尼比及自然頻率，整體架構如圖 6 所示，此即圖 5 之參考模式方塊。

當運動姿態輸入加入圖 4 時，配合 Matlab/Simulink 軟體模擬碎石路面運動軌跡姿態，求得路面運動軌跡轉換成六個致動腳伸長量軌跡，做為參考模型的參考輸入 $Y(t)$ 。本文重點在於建構適應性控制之參考模式，規劃控制對象之閉迴路系統，達到需求的性能。例如：史都華平台致動腳的暫態規格：最大超越量必須為 0%，使得平台無振動現象，而上升時間則需儘量的快，以求快速達到目標值。另穩態規格則需使追蹤誤差（穩態誤差）儘可能的小。若暫態反應太快或太慢，造成控制系統反應不佳，則需重新選擇阻尼比 ζ 、自然頻率 ω_n 、PID 參數值等，使系統的暫態響應能符合性能需求。

IV. 模擬結果與討論

本文首先給予六軸史都華平台戰甲車行駛碎石路面資料為圖 4 之輸入訊號，如圖 7 所示。經過圖 4 之逆向

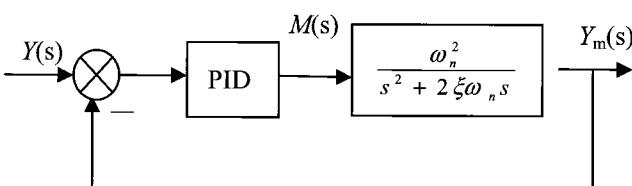


圖 6 參考模型之結構圖

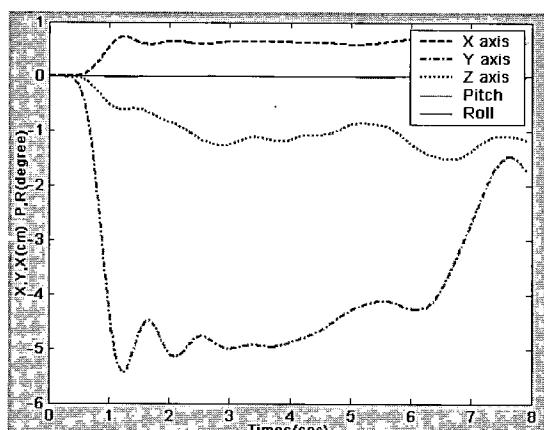


圖 7 戰甲車行駛碎石路面姿態資料

運動學計算，分別輸出各軸的伸長量，如圖 8 所示。依據第三節所設計的標準二階系統數學模式，並在 Matlab/Simulink 軟體環境下建立數學方塊圖實現，以作為適應性控制系統參考模式之標準輸入。

依據第三節所述之動態響應規格，進行參考模型之設計。因此本文模擬以圖 6 之經 PID 補償之閉迴路系統，結果如圖 9 所示。經模擬比較後得阻尼比 ζ 為 1.0 時，自然頻率 ω_n 大於 80，系統反應不發生過射量，且能有較快之反應。圖 9 之附表為不同變數暫態響應（最大超越量與上升時間）與穩態響應（穩態誤差）之比較

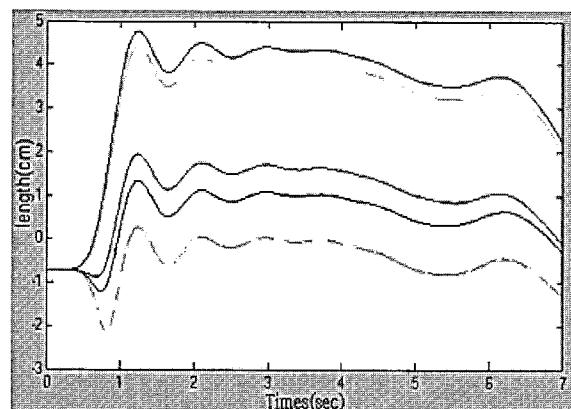
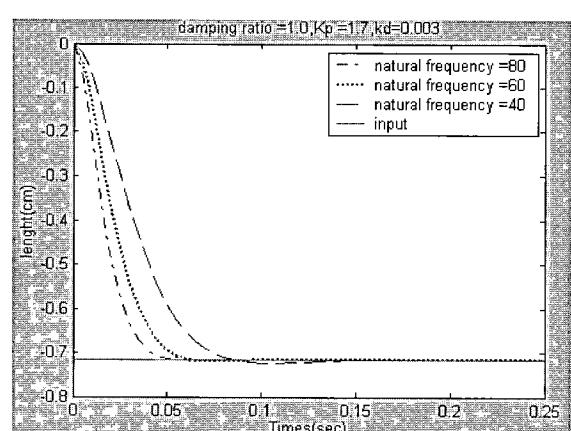


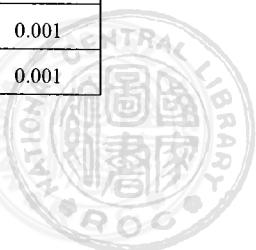
圖 8 史都華平台各致動腳伸長量



阻尼比=1.0 時 暫態響應比較表

自然頻率	最大超越量	上升時間	安定時間	穩態誤差
80	0.004	0.026	0.09	0.001
60	0.0074	0.033	0.13	0.001
40	0.012	0.048	0.175	0.001

圖9 阻尼比=1.0時參考模式之反應圖



表，由此表知，當自然頻率 ω_n 大於 80 時，均可符合動態規格，故以自然頻率 $\omega_n=80$ 為設計值。

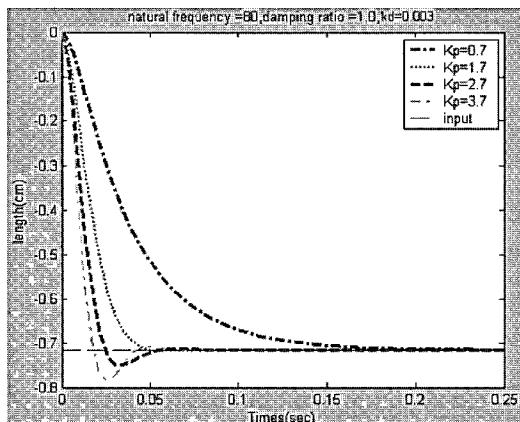
而圖 10 表示自然頻率 ω_n 為 80 時，不同阻尼比下，參考模式之反應。經計算比較後得阻尼比 $\xi=1$ 時為較佳值。此時系統反應亦不發生振盪，而能穩定的收斂趨近於理想值。圖九之附表為不同變數暫態響應（最大超越量與上升時間）與穩態響應（穩態誤差）之比較表，由此表知，當阻尼比 ξ 大於 1 時，過射量雖可符合動態規格，但其上升時間則會變慢，而不符合動態規格，故以阻尼比 $\xi=1$ 為設計值。

圖 11 表示改變 K_p 值時，參考模型之暫態響應。比較得知 K_p 為 1.7 時，系統有較快之響應且無過射量。圖 11 之附表為不同變數暫態響應（最大超越量與上升時間）與穩態響應（穩態誤差）之比較表，由此表知，當 K_p 值大於 1.7 時，會產生過射量而不符合動態規格。而當 K_p 值小於 1.7 時，上升時間則會變慢，而不符合動態規格，故以 K_p 值等於 1.7 為設計值。

圖 12 表示改變 K_d 值時，參考模型之暫態響應。由圖知， K_d 值為 0.003 時，較能符合系統的暫態響應規格。圖 12 之附表為不同變數暫態響應（最大超越量與上升時間）與穩態響應（穩態誤差）之比較表，由此表知，當 K_d 值大於 0.003 時，上升時間會變慢，而不符合動態規格。當 K_d 值小於 0.003 時，會產生過射量而不符合動態規格，故以 K_d 值為 0.003 為設計值。

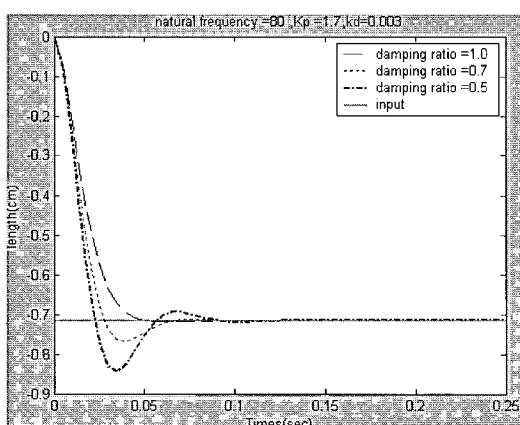
圖 13 表示改變 K_i 值時，參考模型之暫態響應。由圖知， K_i 值只要大於零，參考模式就有過射量產生，不符合參考模式規格。圖 13 之附表為不同變數暫態響

應（最大超越量與上升時間）與穩態響應（穩態誤差）之比較表，由此表知， K_i 值只要大於零，參考模式就有過射量產生，不符合參考模式規格，故本文令 $K_i=0$ 。



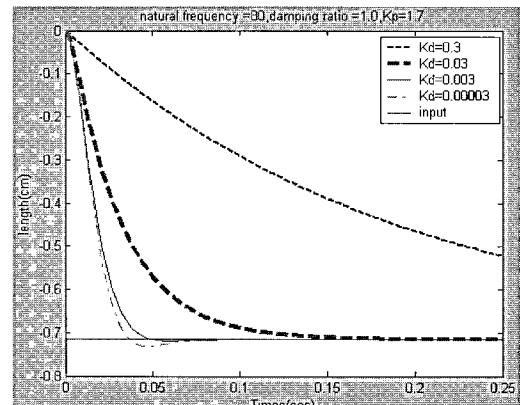
改變 K_p 值時 暫態響應比較表				
K_p	最大超越量	上升時間	安定時間	穩態誤差
0.7	0	0.076	0.26	0.001
1.7	0.004	0.026	0.09	0.001
2.7	0.05	0.016	0.08	0.001
3.7	0.102	0.011	0.082	0.001

圖 11 改變 K_p 值時之暫態響應



自然頻率=80 時 暫態響應比較表				
阻尼比	最大超越量	上升時間	安定時間	穩態誤差
1	0.004	0.026	0.09	0.001
0.7	0.074	0.018	0.104	0.001
0.5	0.175	0.015	0.122	0.001

圖 10 自然頻率=80 時參考模式之反應圖



改變 K_d 值時 暫態響應比較表				
K_d	最大超越量	上升時間	安定時間	穩態誤差
0.3	0	0.42	1.117	0.1
0.03	0	0.065	0.2	0.001
0.003	0.004	0.026	0.09	0.001
0.00003	0.023	0.022	0.11	0.001

圖 12 改變 K_d 值時之暫態響應

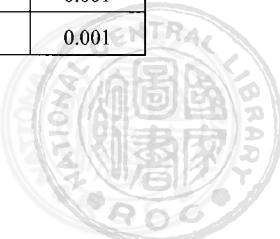
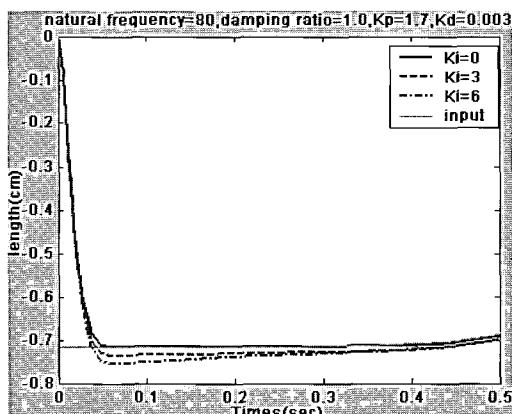


圖 14 表示參考模式追蹤參考輸入 $Y(t)$ 之情況，由圖顯示其追蹤情況相當良好，足以作為六個致動器腳之追蹤目標，亦即在六軸平台的外在負載變動時或致動器腳內在參數變化時，受控裝置隨時追蹤之參考目標。

圖 13 改變 K_i 值時之暫態響應

改變 K_i 值時 暫態響應比較表				
K_i	最大超越量	上升時間	安定時間	穩態誤差
0	0.004	0.026	0.09	0.001
3	0.0308	0.025	1	0.001
6	0.579	0.023	1.35	0.001

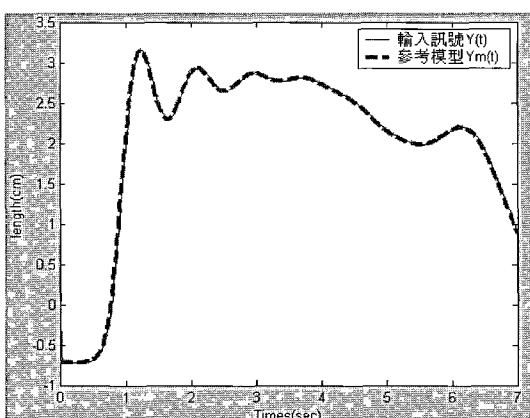
圖 13 改變 K_i 值時之暫態響應

圖 14 參考模式追蹤情況

V. 結論與建議

本文主要建構史都華平台致動腳之參考模型，首先以戰甲車碎石路況為輸入訊號，再利用史都華平台逆向運動學轉換成六個致動腳的伸長量所需軌跡，再對致動腳運動所需軌跡進行追蹤控制。

由圖 9 至圖 13 之模擬結果知，在符合史都華平台致動腳的需求規格下，當參考模式的阻尼比 ζ 選為 1.0 及自然頻率 ω_n 選為 80 時，PID 控制器的三個控制增益最佳值，可藉由 Matlab/Simulink 軟體模擬求得 $K_p=1.7$ ， $K_d=0.003$ ， $K_i=0$ 。藉由尋找適當的參考模型可探討未來史都華平台致動腳在加入適應性控制器時，對於史都華平台致動腳的可控制性。

在參考模型設計方面，本文選用具 PID 控制器之標準二階系統做為參考模型，以跟隨碎石運動軌跡產生之六個致動腳的伸長量變化。在 Matlab/Simulink 模擬結果可以發現，本文提供之建立參考模式方法可方便設計者運用於適應性模式追蹤控制理論，至於適應性模式追蹤控制理論應用於史都華平台致動腳之研究，是本文後續研究之重點。

參考文獻

- [1] D. Stewart, "A platform with six degrees of freedom," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 180, part 1, no. 5, pp. 371-386, 1965-1966.
- [2] K. H. Hunt, "Structure kinematics of parallel actuated robot arms," transactions of ASME, Journal of mechanics, Dismitions, and Automation in design, vol. 105, pp. 705-712, 1983.
- [3] D. C. Yang and T. W. Lee, "Feasibility study of a platform type of robotic manipulators from a kinematic viewpoint," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol. 106, pp. 191-198, 1984.
- [4] W. Q. D. Do and D. C. H. Yang, "Inverse dynamics analysis and simulation of a platform type of robot," Journal of Robotics Systems, vol. 5, pp. 209-229, 1988.
- [5] 陳信豪, 液壓驅動史都華平台之強健性控制系統設計, 碩士論文, 國立台灣大學電機工程學系, 台北, 1997。
- [6] 魏榮輝, 「運動模擬機技術發展趨勢與市場調查分析」, 新新季刊, 第30卷, 第1期, 第190-198頁, 2002年1月1日。
- [7] J. H. Wei, M. C. Shih and C. P. Chiu, "Model following PID control using hyperstability theory," JSME International Journal, Series III, vol. 34, no. 3, pp. 377-381, 1991.
- [8] 魏榮輝、簡政嘉和蕭百益,「以超穩定性理論設計模式追蹤型 PID 控制器之研究」, 崑山科技大學學報, 第 1 卷, 第 1 期, 第 1-11 頁, 2004 年 12 月 31 日。
- [9] W. Q. D. Do and D. C. H. Yang, "Inverse dynamics analysis and simulation of a platform type of robot," Journal of Robotics Systems, vol. 5, pp. 209-229, 1988.
- [10] 碎石路面資料來源由上醇科技公司所提供之戰甲車行駛於碎石路面數據資料。
- [11] Matlab/Simulink 中 Stewart Platform Model 之逆向運動學轉換程式。

