教科書研究
第七卷 第三期（2014 年 12 月），101-141

臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之比較

徐偉民　柯富渝

本研究旨在探討臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書中，幾何教材內容呈現的異同。以臺灣康軒數學、芬蘭 WSOY 版 *LASKUTAITO in English*、和新加坡 MCE 版 *My Pals are Here! Maths* 爲對象，採內容分析法，以數學問題爲分析單位，依問題的類型、表徵與情境來進行分析，以瞭解三國國小幾何教材呈現的特色。結果發現，三國幾何問題的類型均以無連結程序型問題爲主，作數學型問題最少；問題情境以無情境爲主，問題表徵以視覺型態表徵爲主。三國幾何教材較大的差異在例題的呈現上，臺灣和新加坡呈現較詳細的思考歷程，而芬蘭則直接呈現單一解法。另外，在例題與練習題的比例上，臺灣與新加坡約爲 1:3，而芬蘭約爲 1:25。

關鍵詞：內容分析、國小數學教科書、幾何教材、數學問題

收件：2014年4月25日；修改：2014年9月30日；接受：2014年11月24日

徐偉民，國立屏東大學科普傳播學系副教授，E-mail: ben8535@mail.nptu.edu.tw
柯富渝，高雄市福康國小教師

Journal of Textbook Research
Vol. 7, No. 3 (December, 2014), 101-141

A Comparison of Geometry Content in Instructional Materials of Elementary School Mathematics Textbooks in Taiwan, Finland, and Singapore

Wei-Min Hsu Fu-Yu Ko

The purpose of this study is to compare geometry content of instructional materials in elementary mathematics textbooks of Taiwan, Finland, and Singapore. The instructional materials reviewed were *Kang-Hsuan Mathematics*, the WSOY *LASKUTAITO in English*, and the MCE *My Pals are Here! Maths*, textbooks used to teach mathematics in Taiwan, Finland, and Singapore, respectively. Content analysis was used and mathematical problems were the unit of analysis. These were classified based on their cognitive types, representational forms, and contexts. The findings of this study show that most of the problems were classified as 'procedure without connection' with only a few problems belonging to the category of 'doing mathematics'. Most of the problem contexts and representative forms in all three countries were non-contextual problems and visual forms. The significant differences among three countries were on the presentation of example problems and the ratio between example and practice problems. On the presentation of the example problems, Taiwan and Singapore provided more detailed thinking and a guided process to help in problem solving, but brief descriptions and demonstrations were presented in Finland. The ratio between example and practice problems was about 1:3 in Taiwan and Singapore and 1:25 in Finland.

Keywords: content analysis, elementary mathematics textbooks, geometry materials, mathematical problems

Received: April 25, 2014; Revised: September 30, 2014; Accepted: November 24, 2014

Wei-Min Hsu, Associate Professor, Department of Science Communication, National Pingtung University, E-mail: ben8535@mail.nptu.edu.tw
Fu-Yu Ko, Teacher, Kaohsiung City Fukang Elementary School.

壹、緒論

生活週遭的自然與社會環境中到處可見數與形，各種數與形都有一些規律存在，而數學要探討的就是這些規律（國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域，2000）。人類是視覺的動物，爲了生存，人類天賦對「形」或「幾何」的直覺，遠比一般人所想像的還要豐富。因此，幾何不但是數學教育中的重要課題，也是較易學習、較有趣的教學單元（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2008）。幾何，不但經常出現於日常生活中，而且可作爲學習其他數學主題的工具，有助於培養學生思考分析推理的能力，發展高層次數學創造和思考的能力，進而有助於解決日常生活眞實情境的問題（左台益，2002；Clements & Battista, 1992; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000）。由此可見幾何概念學習的重要。

根據 van Hiele（1986）對幾何認知發展的觀點，幾何學習的關鍵在於教師的教學。而影響教師數學教學最關鍵的因素之一便是教科書（徐偉民，2011a；Remillard, 2005; Tarr et al., 2008）。因爲教科書提供了教學的內容和順序（Nicol & Crespo, 2006），是教師「教」和學生「學」之間最重要的工具（徐偉民、徐于婷，2009），也是學生數學學習的主要依據（Grouws, Smith, & Sztajn, 2004; Stein, Remillard, & Smith, 2007）。臺灣從 1990 年代進行數學教育改革以來，歷經了數次課程綱要與目標的調整，連帶影響了教科書的編輯與呈現，再加上實施一綱多本的教科書開放政策，廣泛引起關心國小數學教育人士熱烈的討論（翁秉仁，2003），因爲擔心教科書內容的調整，影響學生數學學習的表現與能力，進而影響未來的發展，而美國國家研究協會也有類似的疑慮，主張學界應對於改革的數學課程的內容與實施進行評鑑，以了解改革課程的有效性（National Research Council [NRC], 2004）。另外，研究上也發現，數學課程內容結

構的不同，的確會影響學生數學學習的成效（Grouws et al., 2013）。這些都顯示出教科書內容分析與探究的重要。同時學者也主張，進行跨國教科書的比較，可以了解不同國家學生數學思維的發展（Ding & Li, 2010），以及思考如何提供學生更好數學學習與發展的機會。因此，許多研究者投入跨國數學課程的比較，以瞭解不同國家數學課程編排的特色，以及其對教師教學與學生學習的影響（如徐偉民，2013a；吳麗玲、楊德清，2007；Son & Senk, 2010）。

近年來，臺灣學生在國際測驗評比中有不錯的表現，例如在經濟合作暨發展組織針對全球 15 歲學生所辦理的學生能力國際評量計畫（The Programme for International Student Assessment, PISA）中，2006 年在 57 個參與國家中名列第一（Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2008）。2009 年在 65 個參與國家中名列第五，只與前三名的上海、新加坡和香港有顯著差異（OECD, 2010）。2012 年在 65 個參與國家中名列第四，只與前兩名的上海、新加坡有顯著差異（OECD, 2013）。雖然學生有亮麗的表現，但三次的測驗結果都顯示，臺灣學生得分的級距在前幾名國家中幅度最大（分別是 4.1, 3.4 和 3.3），顯示學生的學習表現較爲分散，不像芬蘭與新加坡學生表現佳且集中（新加坡標準差爲 1.3 與 1.4，芬蘭標準差爲 2.3, 2.2 和 1.9）；而在另一個國際數學與科學成就趨勢調查（Trends in Mathematics and Science Study, TIMSS）中，臺灣四年級與八年級學生同樣有優異的表現，以四年級學生爲例，在 2003 年平均成績位居世界第四（Mullis, Martin, Gonzales, & Chrostowski, 2004），2007 年位居第三（Mullis, Martin, & Foy, 2008），2011 年則爲第四（Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012）。不過在幾何主題的表現，不但明顯低於整體的數學成績與其他主題（如數與資料呈現）的得分，不如其他鄰近且表現優異的亞洲國家（如新加坡、香港）（Mullis et al., 2012）。這引發了研究者的好奇：與其他在國際測驗表現優異的國家相比，臺灣國小幾何教材呈現的特色爲何？其他國家在國小課程中如何呈現幾何教

材的內容？其特色爲何等。因此，本研究選擇了在 PISA 表現優異的芬蘭（被 OECD 評爲整體表現優異，學生個別學習差異最小的國家）（OECD, 2001, 2002, 2003），以及在 TIMSS 表現優異的新加坡（四年級學生在歷次測驗的表現都高居前兩名），作爲與臺灣幾何教材比較的對象，希望透過幾何教材的內容分析比較，來瞭解臺灣自己的特色，以及與其他國家的差異，作爲未來幾何教材編修或現場教師教學的參考。

數學問題是數學教科書內容構成的基本單位，也是教師教學時的主要依據（徐偉民，2013b；Grouws et al., 2004），在許多跨國性教科書內容比較時，數學問題是主要的分析單位與指標（徐偉民、黃皇元，2012；Son & Senk, 2010; Zhu & Fan, 2006）。因此，本研究以數學問題爲分析單位。而在探討不同類型數學教科書內容的差異（如美國 integrated 與 subject-specific 兩種類型的課程），數學問題的類型與呈現方式都是主要的焦點（如 Grouws et al., 2013）。而且，許多研究發現，數學問題的類型與呈現方式，會影響學生數學學習是聚焦在高認知或低認知的問題，進而影響數學思維與能力的發展（徐偉民，2011a，2011b；Stein et al., 2007; Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000），甚至會影響學生對於數學本質的觀點（Henningsen & Stein, 1997）。同時，大樣本的研究也發現，數學問題的呈現與組織方式的不同，會影響學生數學學習的表現（Grouws et al., 2013; Tarr, Grouws, Chávez, & Soria, 2013）。因此，本研究從問題的類型與呈現方式兩個面向來進行分析比較，來瞭解三個國家國小幾何教材的特色，以及對學生幾何學習可能產生的影響。

貳、文獻探討

一、臺灣、芬蘭、新加坡幾何課程的目標

從數學課程整體的目標來看，臺灣九年一貫的數學課程，強調培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。並希望學生學習應

用問題的解題方法，同時也培養欣賞數學的態度及能力（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003）；芬蘭 2004 年所頒布的國家核心課程綱領中，數學課程強調能提供學生發展數學思維的機會，將所學習到的數學概念應用在問題解決，並從中發展學生數學創意與精確的思考，以兼顧數學思考與執行技能兩方面能力的培養（National Board of Education [NBE], 2004）；新加坡的數學課程強調以解題爲核心，透過解題的歷程來發展思考與推理的技能，瞭解數學概念之間的關聯與熟練解題的技巧，培養對於數學的積極態度。概念、技巧、過程、態度和後設認知這五種相關的能力，是新加坡數學課程的核心目標（Curriculum Planning and Development Division [CPDD], 2006）。三個國家數學課程整體目標都強調與學生的生活經驗連結，透過解題的歷程來發展數學概念的理解與技巧的熟練，同時在過程中來培養思考、推理、溝通等能力，使學生具備數學的素養（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003；NBE, 2004; CPDD, 2006）。三國數學課程學習的主題劃分類似，都包括了數與計算、代數、幾何、測量、統計等，但學習階段的劃分有所不同：臺灣 97 課綱規劃的學習階段爲一至二、三至四、五至六、七至九年級，芬蘭則爲一至二、三至五、六至九年級，新加坡一至四年級爲基礎階段，五至六年級爲定向階段。而在數學課程目標的撰寫上也有所不同：臺灣清楚地列出各學習階段與年級的學習目標（能力指標），芬蘭以三部分來呈現學習的目標、核心的內容與習後的理想表現，新加坡則以兩部分來說明綱要目標與各階段具體的學習內容。

再從國小幾何課程的目標來看，三國都以幾何相關概念的描述，來指出幾何課程學習的焦點與目標。例如：臺灣一至二年級幾何課程強調從生活中觀察具體物體，能分類、描述、辨認簡單的幾何形體，並認識水平與鉛直的現象；三至四年級透過操作、切割等方式，來認識形體的性質；五至六年級則能利用形體的性質來解決簡單的幾何問題，並認識比例尺（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003）。芬蘭在一

至二年級強調透過觀察來描述生活週遭的幾何形體，並在觀察與操作中瞭解幾何的形體的構成要素，以及水平與鉛直的現象；三至五年級能瞭解圖形定義、理解相似的概念與對應、理解測量的原則並加以運用來解決幾何相關的問題（NBE, 2004）。新加坡一至二年級也是能辨認、描述基本形狀；三至四年級著重在辨認、命名垂直和平行線，認識、解決形體周長及面積；五至六年級瞭解各形體間的差異（CPDD, 2006）。雖然三國在各年段幾何學習的內容略有不同（例如：新加坡國小階段並未引入圖形放大、縮小及比例尺的概念，芬蘭在五年級引入點對稱概念），但從數學課程與幾何課程的目標來看，三國國小幾何教材的內容，大都聚焦在平面與立體圖形的範疇，包括幾何形體的辨識與描述、形體構成要素的理解與應用、形體內（間）關係的辨識與理解、幾何形體的解題等面向。就學習的內容來看，包含了基本幾何概念（如平行與垂直）、幾何量的介紹（如面積、體積、角度等）、以及相關的應用解題等，而且學習的內容順序，大致上符合 van Hiele（1986）提出的幾何認知發展的理論。因此，國小幾何教材的內容，除了基本概念外，還包含幾何形體所涉及的幾何量、幾何性質、與應用解題等。

此外，就課程目標來看，國小幾何教材所呈現的數學問題，應該有相當的比例與學生的生活經驗或情境有關，以符合課程中強調與生活經驗連結的主張；數學問題的類型除了涵蓋基本概念與運算技巧的問題外，也應該要有相當的比例是屬於高層次思考、推理或歸納的高認知問題，以符合課程中強調高層次思考能力的培養。但，教科書中幾何問題的類型與呈現方式是否與課程目標相符，則需進一步的分析與檢視。

二、數學問題的類型和呈現方式

（一）數學問題的類型

Stein 等人（2000）根據學生在解題時所需的認知需求（cognitive

demand），由低到高將數學問題分成記憶型（memorization）、無連結程序型（procedure without connections）、具連結程序型（procedure with connections）、作數學（doing mathematics）等四種類型。其中，前兩類屬於低認知的問題，解題時著重在應用事實、規則或運算技巧的熟練來解題，較不強調與概念本身的連結，對學生而言是較簡單的問題；後兩者屬於高認知的問題，解題時除了需具備運算的能力外，更強調概念與程序之間的連結、對問題的探索與推理，學生通常需要經過探索與理解後，才能選擇合適的策略來進行解題。四種問題類型的特徵如表 1 所示。

由於數學問題是教科書內容構成的基本單位（Stein et al., 2007），且教師大都依據教科書的數學問題來進行教學（徐偉民，2013b；Grouws et al., 2004），教科書中的數學問題類型，不但會影響到教師數學教學的實施方式，更會影響到學生數學學習的焦點與能力的培養（徐偉民，2011a，2011b；Henningsen & Stein, 1997）。因此，透過數學問題類型的分析，將可瞭解臺灣、芬蘭與新加坡三國教科書中幾何教材內容的焦點與特色，以及對三國幾何教與學可能產生的影響。

（二）數學問題的呈現方式

通常，要了解或分析教科書中數學問題的呈現方式，可以從數學問題採用的表徵形式和數學問題所涉及的情境兩個面向來理解。表徵是數學學習的重要媒介，透過表徵的呈現，可以使數學概念具體化，並成爲學生運思的材料與解題的工具。NCTM（2000）指出，表徵可幫助學生達成數學知識的理解、溝通與推理的目的，由此可見表徵的重要。過去，Lesh, Post 與 Behr（1987）提出了在數學學習與解題過程中可能出現的五種不同表徵，包括實物、操作模型、圖形、語言及書寫符號。但是在進行教科書分析的研究中，發現教科書中出現的問題表徵形式包括了數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態問題四種類別（徐偉民、黃皇元，2012；Zhu & Fan, 2006），其中數學型態指的是問題的主軸只包含數學符號，文字型態指問題的主軸全爲文字敘述，這兩類的表徵即爲 Lesh 等人

（1987）所稱的書寫符號表徵；視覺型態爲問題的主軸簡明地由插圖、圖像、圖表、曲線圖、表、圖示、地圖等來表示，此表徵包括了 Lesh 等人（1987）歸類的模型與圖形表徵；而聯合型態則是問題的主軸呈現出兩種或三種之上述型態。比較過去教科書分析採用的四種表徵型態與

表 1　四種認知類型問題的特徵

問題類型	判斷標準
記憶型	1.複製學過的事實、規則、公式或定義來解題，或問題要求記住事實、規則、公式或定義 2.不使用程序來解題，因爲程序不存在或因爲時間太短以致不需使用 3.問題很明確，解答可從問題呈現的內容中來複製，且複製的內容也是明顯且直接的 4.在學習或複製的事實、規則、公式或定義，並沒有和其概念或意義進行連結
無連結程序型 具連結程序型	1.是計算問題，使用特定的程序，或根據之前教學或經驗所使用的程序來解題 2.僅需有限的認知需求即可解題，明確地知道要作什麼和如何作 3.在使用程序解題時，並沒有連結其概念或意義 4.焦點在於獲得正確的答案而不是發展對數學的了解 5.不要求解釋，或解釋僅聚焦在描述其所使用的程序
作數學	1.聚焦學生的注意在其使用的程序，其目的在於發展對數學概念更深的理解 2.解題採用的方法是一般與概念有緊密連結的程序，而非僅專注在無連結的運算上 3.通常以多元的方式來呈現，並透過多元表徵的連結，幫助發展意義的理解 4.解題需要付出一些程度的認知努力，雖然需要依循一般的程序，但並非盲目地依循，學生需結合概念的理解與所需的程序才能成功解題，並發展理解
記憶型	1.要求複雜和非運算的思考來解題，例如沒有一個可預測或已知的明確方法來解題 2.要求學生去探索和了解數學概念的本質、程序和關係 3.學生需要自我監控與調整自己的認知過程 4.要求學生存取相關的知識和經驗，並適當的使用他們來解題 5.解題時要求相當程度的認知努力，包含對於解答過程的不可預測性所產生的焦慮

資料來源：整理自 Stein et al.（2000: 16）。

Lesh 等人（1987）的五種歸類，發現並無實物和語言兩種表徵，但這兩種表徵是屬於在教學和學習情境下所使用的表徵，且實物的表徵在教科書中通常以圖像來呈現（視覺型態），而聯合型態表徵則提供表徵間連結與轉換的機會，如果能夠建立表徵之間的連結與轉換，將有助於學生產生有意義的學習。根據上述的分析與比較，本研究決定採用過去教科書分析中所採用的包括數學、文字、視覺、聯合四種表徵的類別，來進行三國幾何教材的分析，以對三國在數學問題呈現方式上的一同。四種問題表徵的範例與判斷標準如表 2 所示。

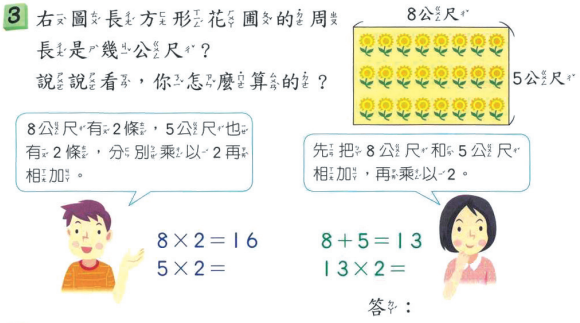
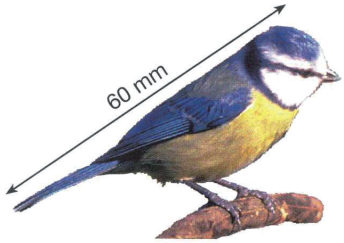
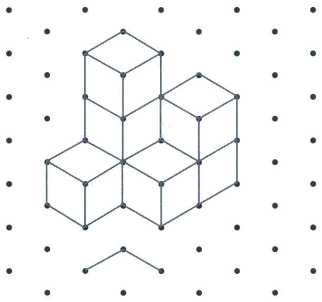
此外，許多研究也指出，數學問題的情境若能貼近學生的生活經驗，將有助於學生數學的理解與學習（Anderson, 2003; Ensign, 2005; Gutstein, 2003），而且培養學生應用數學能力來解決生活中所遭遇的問題，是目前數學教育的趨勢（Lesh & Lamon, 1992; NCTM, 1989, 2000），各國在重要的數學綱要文件中，都強調了數學學習與生活連結的主張（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003；CPDD, 2006; NBE, 2004; NCTM, 2000）。誠如 Zhu 與 Fan （2006）的研究發現，顯示教科書中增加眞實情境問題的數量，不但能促進教科書問題的多樣化，更能營造一個有利於高層次理解的學習環境。Blanton 與 Kaput（2002）認爲要協助學生檢驗數學的結構，發展推理的方法，最好是提供以情境爲主的問題，如此可協助學生組織情境之間的共通性，洞察數量之關係如何改變。Lesh 與 Lamon（1992）也主張，學生能否將所學習的數學知識和技能應用在生活問題的解決，主要視學習的數學問題是否貼近他們的生活經驗而定。由此可見，數學問題呈現的情境，是影響學生數學學習與應用的關鍵。因此，本研究參考 Lesh 與 Lemon（1992）的主張與分類，將數學問題分爲有情境與無情境兩種類型，其中情境問題包含眞實情境問題與虛擬情境問題，藉此來瞭解三國在數學問題呈現上的另一種異同。數學問題情境的範例與判斷標準如表 3。

表 2　四種表徵型態問題的範例與判斷標準

表徵型態	問題範例	判斷標準
數學型態	**27.** Convert to square centimetres. **a)** 300 mm^2 = _____ **b)** 9 mm^2 = _____ **c)** 4 dm^2 = _____ **d)** 3,2 dm^2 = _____	問題的主軸以數學符號爲主
文字型態	**5** Linda bent a wire 132 cm long into a square. What is the length of a side of the square? Length of a side = ☐ ÷ 4 = ☐ cm The length of a side of the square is ☐ cm.	問題以文字敘述爲主
視覺型態	2 可以印出什麼形狀？圈出來。 例： (1) (2) (3)	問題以圖像爲主來呈現
型態	Figures that are **similar** have the **same shape** but are **different sizes**. When the size of a figure is **doubled**, for example, this means **each of its lengths is doubled**. When a figure is **reduced** by half, for example, this means **each of its lengths is divided by two**. Note! The area does not change in the same ratio as the lengths.	問題以兩種以上表徵型態來呈現（視覺與數學型態）

資料來源：楊瑞智（主編）（2009a：70）；Lee & Yong（2008: 9）；Saarelainen（2010a: 86；2010b: 72）。

表 3　兩種問題情境的範例與判斷標準

型態	問題範例	判斷標準
情境數學	3 右圖長方形花圃的周長是幾公尺？ 說說看，你怎麼算的？  	可分爲眞實情境數學與虛擬情境數學
	95. What is the actual length of each bird?  a) The blue tit has been reduced in the ratio 1:2.	
無情境數學	Draw an identical figure below. 1. 	在問題中沒有任何情境者

資料來源：楊瑞智（主編）（2009b：33）；Saarelainen（2009: 124；2010a: 91）。

三、數學教科書研究的要求與分析架構

世界各國爲了要提升學生數學學習的表現與能力，紛紛進行數學教育的改革，其中便從教科書內容的改革著手，因爲教科書是影響教師數學教學與學生數學學習的關鍵。在進行改革一段時間後，學界開始主張要檢驗所提出的課程計畫或內容的有效性，以釐清數學課程改革對學生數學學習的影響（Stein et al., 2007）。NRC（2004）主張在進行評鑑課程時，應該要對不同的課程計畫，或課程計畫中某一個主要部分（如數學學習的主題），採用學界普遍接受的方法，來進行分析比較，以了解課程對學生數學學習的影響。因此，國內外許多研究者投入數學教科書的比較研究。從 NRC（2004）所提的課程評鑑的要求與架構來看，大多數的研究是針對不同國家的某一學習主題進行分析探究，包括代數（徐偉民、徐于婷，2009；陳仁輝、楊德清，2010）、分數（吳麗玲、楊德清，2007；徐偉民、黃皇元，2012；Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010; Son & Senk, 2010）、幾何（徐偉民、林美如，2009；徐偉民、董修齊，2012）；或進行跨國同一年級涵蓋主題與順序的比較（楊德清、施怡眞、徐偉民、尤欣涵，2011），也有研究進行跨國整體數學課程的比較（徐偉民，2013a）。上述相關的研究，都符合 NRC（2004）對於課程評鑑中所提的要求，針對不同課程的同一主題進行分析比較，而且採用數學教育學界所普遍接受的內容分析法來進行分析，唯一不同之處在於分析時採用的分析類目。而本研究與過去相關研究相比，同樣符合 NRC（2004）對於課程評鑑的要求，針對三個在國際測驗中表現優異國家的數學課程，針對幾何的主題進行分析比較，也採用內容分析法，唯一不同處在於過去在進行跨國幾何教材相關研究時，大都採用 van Hiele（1986）的幾何認知的發展順序與架構，來發展其分析類目，如徐偉民與林美如（2009）、徐偉民與董修齊（2012），藉此了解不同國家在幾何教材編排順序上的差異，以及對不同幾何概念重視的程度。但本研究是針對問題的認知類型與呈現方式，來比較不同國家幾何教材著重培養的數學能力與思維，以

及呈現方式是否有助於學生的理解，同時也藉此略爲了解各國對於幾何學習的觀點。這是本研究與過去相關研究最大不同之處。

在教科書分析的架構方面，NRC（2004）指出課程評鑑的架構應包含兩個部分，第一部分是課程評鑑涉及的成分，包括初級成分（primary component）與次級成分（secondary component），第二部分是關於課程評鑑的研究設計與提供的證據。其中，教科書分析屬於第一部分初級成分的分析，主要是針對數學的內容與課程設計要素進行分析；Remillard（2005）則主張數學課程包含了主觀的編寫計畫（subjective scheme）和客觀的編排結構（objectively given structures）兩個面向，主觀計畫是指教科書編寫的哲學依據與目的，客觀結構是指數學概念與問題的呈現方式、使用的材料與呈現方式、編排的結構等，且主客觀之間會相互影響與呼應；Charalambous 等人（2010）認爲數學教科書的分析包含橫向、縱向和脈絡三個面向：橫向分析著重在教科書一般的特點，包括外在的呈現方式（名稱、數量、頁數）和內容結構（單元數量、涵蓋主題、主題順序等）；縱向分析在探討教科書如何處理單一數學主題，包括傳達給學生的數學內容、數學練習與態度、學生的回應（如潛在的認知需求）與連結（與課程標準的連結、與校外情境的連結）；脈絡分析則聚焦在師生於數學活動時使用教科書的情形。從上述三個數學教科書的分析架構來看，國內外數學教科書的研究大都是屬於 NRC（2004）所指出的初級成分的課程評鑑，都聚焦在 Remillard（2005）的客觀結構範疇，採用 Charalambous 等人（2010）縱向或橫向分析的面向，來進行跨國數學教科書整體或某一學習主題的分析比較。由此來看，過去教科書相關研究採用的分析架構相似、研究方法也相同，唯一不同處在於不同研究目的下，採用或發展出不同的分析類目，且大多數是從概念本身來形成分析類目（如徐偉民、徐于婷，2009；徐偉民、黃皇元，2012；Charalambous et al., 2010; Son & Senk, 2010），較少如本研究從問題的認知類型與呈現方式來進行單一學習主題的跨國比較。進一步以 Charalambous 等人（2010）

的分析架構來看，本研究採取縱向分析來探討三國教科書呈現幾何問題的方式（幾何問題的表徵，屬於分析架構中傳達給學生的部分）、幾何問題所涉及的認知需求（幾何問題的認知類型，屬於分析架構中學生回應的部分）、幾何問題與生活情境連結的情形（幾何問題的情境，屬於分析架構中連結的部分）三部分，同時也分析三國幾何教材中所使用的例題與練習題的數量與特色（屬於分析架構中傳達給學生的部分），並以橫向分析來描述三國幾何教材的一般特色，包括單元名稱、數量、版面編排與呈現等，希望結合縱向與橫向分析的結果來呈現臺灣、芬蘭與新加坡國小幾何教材內容呈現的異同。

參、研究方法

一、內容分析法

本研究採用內容分析法，這是一種採客觀與系統的態度，對文件的內容進行量化的歸類統計與質化的分析，藉以推論文件內容之環境背景和意義的一種研究方法（歐用生，2000）。內容分析法是教育研究領域常用的一種研究方法，普遍應用在教科書的內容分析（Posner, 1989）。而NRC （2004）也提出課程評鑑和比較的架構，並建議採用內容分析法來針對教科書的內容進行分析。教科書內容分析的特性與價值、以及研究學會的建議，使本研究決定採用內容分析法來對三國的幾何教材進行分析比較，先採用量化分析的方式加以統計，以比較臺灣、芬蘭和新加坡國小數學教科書幾何教材中數學問題類型分布的情形；再結合量化質化的分析方式，探討三個國家數學問題呈現方式的異同。

二、分析單位與類目

分析單位是將文件內容量化的分析標準（歐用生，2000），通常研究

者可依其研究目的及文件內容的特性來選擇合適的分析單位。數學教科書內容的分析多以單元、活動、頁、問題等作爲單位，但若以單元、活動、或頁爲分析單位，會因一個單位內同時包含數個概念與問題，不適合作細緻的分析與比較，且難以突顯三國在幾何教材內容份量上的差異。而數學問題是教科書構成的基本單位（Stein et al., 2007），以問題爲基本單位來分析將可符合數學教科書編輯的內容特色，且數學問題是國內外教科書常使用的分析單位（徐偉民，2013a；Zhu & Fan, 2006）。因此本研究決定以問題爲計數單位，作爲內容量化的依據。其中，若問題敘述僅包含一個主要問題，且只有一個數字編號，則計數爲一題；若一個問題包含數個子問題，每個子問題有各自的數字或英文編號，則各子問題分別計數爲一題。問題的計數與分析僅限於教科書的範圍，習作與教學指引的問題不列入分析的範疇。

分析單位決定後，接下來便要決定分析的類目，因爲類目是分析單位進行歸類的準則與依據。王文科（2002）指出，類目架構的形成除了與研究目的有關外，還要力求周延、互斥與獨立。一般而言類目可以分爲兩大類：「說什麼」類目（“what is said ”categories）和「如何說」類目（“how it is said ”categories）。前者用來測量內容的實質部分，包括主題、方向、特徵、主角、權威、來源、出處、目標、標準、方向及價值等十類；後者用來測量內容的形式，包括傳播的形式、敘述的形式、感情的強度、策略等四類（王石番，1996）。本研究目的在於探討三國幾何問題的類型和呈現方式，其中問題類型涉及學習的目標與焦點，是屬於「說什麼」類目中的價值類目（目標類目）。此部分將採用 Stein 等人（2000）的分類標準，將數學問題分爲記憶型、無連結程序型、具連結程序型、以及作數學四類。在進行問題歸類時，將根據表 1 的判斷標準來歸類；而問題呈現方式涉及問題呈現的表徵型態和背景，是屬於「如何說」類目中的敘述形式類目，此部分將採用 Zhu 和 Fan（2006）對數學問題表徵形式的分類，將問題的表徵形式分爲數學型態、文字型態、視覺型態

和聯合型態四類。在進行歸類時，將根據表 2 的判斷標準與範例來進行歸類。另外，也採用 Lesh 與 Lamon（1992）對問題情境的歸類，將問題呈現的背景分爲情境問題和非情境問題，前者指的是問題以學生所能夠經驗與理解的情境來呈現，後者指的是未包含任何情境的純數學問題。此部分進行歸類時，將根據表 3 的判斷標準與範例來進行。

三、研究對象

（一）臺灣康軒數學

臺灣於 2000 年推動九年一貫課程改革，強調學校本位與課程統整，並將教科書編輯的權力開放給民間出版業者，國立編譯館正式退出教科書編輯的行列，康軒數學在此背景下誕生，發展至今已成爲市占率最高的版本（36.38%）（康軒教育網，2011）。本研究分析的康軒數學教科書，其內容係依據 2003 年頒布之「九年一貫數學學習領域課程綱要」編輯而成，每學年上下兩冊，共 12 冊（99 學年度上學期與 98 學年度下學期學校用書），除了 1 上、2 上、5 上爲 2009 年出版，3 下 2008 年出版外，其餘皆爲 2010 年出版。康軒數學強調生活化的情境、開放性的問題、並透過圖像的人物呈現不同的解題思考歷程和結果（徐偉民、林美如，2009），且每一冊都包含數與量、幾何、代數、統計等不同數學主題，在 12 冊中共有 113 個單元，其中 27 個是幾何單元。康軒數學在每個單元結束後會有一頁的練習題（名稱爲「練習百分百」），整冊有 2-4 個綜合數個單元的練習題（名稱爲「學習廣角」或「學習步道」），並有兩本數學習作本供學生練習。本研究除針對三國幾何主題單元進行分析外，也將「幾何量」納入分析。

（二）芬蘭 LASKUTAITO in English（簡稱 L 版數學）

L 版數學教科書是由 WSOY 出版業者所發行，是根據芬蘭 2004 年

由 NBE 所制訂的國家核心課程綱領來撰寫。WSOY 編寫 L 版數學教科書有 18 年之久，是芬蘭最大的教科書出版業者（陳之華，2010），同時也是唯一提供英語內容的版本，這是本研究以其爲研究對象的原因。L 版數學每學年分爲 A、B 兩冊，共 12 冊，除 5A、6A 爲 2010 年出版，其他均爲 2009 年出版。L 版數學編輯的目的在於幫助學生獲得概念的理解，以及發展學生的推理能力（Saarelainen, 2009），同時也採用解題取向的方式來進行編輯（Pehkonen, 2007）。L 版數學每冊都包含不同的數學學習主題，每冊單元數不多，在 12 冊中共有 54 個單元，其中 6 個是幾何單元（每年級一個）。L 版數學在每個單元後面提供了「解決問題」、「開放性問題」、「腦力激盪問題」來供學生練習，教科書後面用藍、紅兩種色塊，來區隔出「額外的練習」和「回家作業」兩部分。這兩部分類似康軒數學的習作，因此不列入本研究分析的範圍。

（三）新加坡 My Pals are here! Maths（簡稱 M 版數學）

本研究採用的數學教科書是由 Marshall Cavendish 出版的國小一至六年級 M 版數學教科書，全套共 12 冊。M 版教科書是依據 2007 年新加坡小學綱要編輯而成，目前是市占率最高，且其前身是「基礎數學」，而基礎數學正是新加坡學生在 TIMSS 1995、1999、2003、2007 年國際數學成就評量中主要採用的教材（楊德清等，2011），因此 M 版數學受到數學教育學者的關注與好奇，這也是本研究選用爲研究對象的主要原因之一。M 版數學每年級分爲 A、B 兩冊，12 冊中 3A, 3B, 4A, 4B 爲 2008 年版，2B 爲 2009 年版，其餘均爲 2010 年版。M 版數學強調以理解和活動爲本位的設計方式，透過範例的說明和遊戲的使用，讓學生獲得數學學習的樂趣和信心，同時除了讓學生獲得數學知識外，還希望培養創造性和批判性思考的能力，並成爲有效能的解題者（Ling, 2008）。M 版數學在一冊中包含了數學的不同主題，12 冊中共有 93 個單元，其中幾何有 22 個單元。M 版數學每個單元都包含幾個活動：“Let’s Learn”在介紹與學習新的數學概念；“Carry out this activity”提供學生練習的問題或活

動：“Let’s explore”則提供非例行性問題讓學生去探索與解題。此外，每冊都搭配有數本的練習本（homework, workbook, enrichment）供學生練習，這些練習的題本不列入分析的範圍。

四、信、效度分析與考驗

（一）信度分析

本研究以「相互同意度」進行信度檢定，邀請兩位主修數學教育且有數學教科書分析經驗的研究生，連同本文第二作者，三人共同進行「評分者一致性」的信度檢定。信度分析的步驟如下：

1.選取樣本：從三國數學教科書中，分別從低、中、高年級隨機各取一單元共九單元，作爲分析與信度建立的樣本。三國選取的單元如表4。

表 4　三國選取建立信度的單元

版本	冊別	單元	單元名稱
康軒數學	一下	2	20 以內的加減
	四下	8	周長與面積
	六下	3	列式與等式
L 版數學	1B	1	Adding and subtracting with numbers 0-20
	4A	4	Geometry
	6A	6	Revision and practice
M 版數學	1B	12	Numbers to 40
	4B	12	Area and perimeter
	6A	1	Algebra

2.說明：將分析類目表與其定義分給評分者閱讀，說明歸類的方式及原則，並針對類目表中的疑惑加以溝通、釐清並達成共識。

3.歸類：由三位評分者各自針對單元中的數學問題進行類目的歸類。

4.信度計算：將歸類的結果利用公式進行信度的計算，其公式如下（歐用生，2000）：

（1）相互同意值 Pi

$Pi = \frac{2M}{N1 + N2}$，M 表示兩人共同同意項目數，N1、N2 表示每位評分者同意的項目數

（2）平均相互同意值 P

$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} Pi}{N}$，N 表示評分者兩兩相互比較的總次數

（3）信度 R

$R = \frac{np}{1 + [(n-1)p]}$，n 表示評分員總人數

（4）信度結果：各類目的相互同意值與信度如表5。由表5來看，本研究在三個類目的分析上都具有良好的評分者一致性。

表 5　本研究各類目分析信度結果

數學問題類型			數學問題情境			數學問題表徵形式		
評分者	甲	乙	評分者	甲	乙	評分者	甲	乙
乙	0.89		乙	0.99		乙	0.94	
研究者	0.96	0.94	研究者	0.99	0.99	研究者	0.95	0.94
平均相互同意值 P＝0.93 信度 R＝0.97			平均相互同意值 P＝0.99 信度 R＝0.99			平均相互同意值 P＝0.96 信度 R＝0.98		

（二）效度考驗

爲了提升本研究的效度，同時凸顯三國數學教科書幾何問題的特色，在分析類目的選擇與決定上，首先根據跨國教科書比較分析的架構（Charalambous et al., 2010），決定進行三國教科書幾何教材的縱向分析，針對幾何問題涉及的認知需求、呈現方式、與涉及情境等三種類別進行分析，再根據每種類別在理論或過去研究上提出的分類架構爲基礎，來形成各類別的分析類目：在認知類型採用了 Stein 等人（2000）的解題認知需求的分類、在呈現上採用了 Zhu 與 Fan（2006）對數學問題表徵形式的分類、在涉及情境上採用了 Lesh 與 Lamon（1992）對問題情境的歸類，而形成最後的分析類目。這樣的分析類目也符合內容分析中所強調的「說什麼」和「如何說」兩種類目。此外，在數學問題的歸類過程中，三位分析人員針對判斷標準的問題，不斷進行討論與檢視，在形成共識並取得良好的信度值後才進行正式分析。同時在過程中不斷和具有數學教科書分析豐富經驗的大學教授進行討論與確認，藉由專家的檢視來提升分析結果的有效性。意即，本研究分析類目的形成與分析的結果，不但具有理論的支持，也透過初步的分析、討論與確認，以及專家的參與和審核，使分析的結果更具有說服力。

五、資料處理與分析

本研究以數學問題爲單位，針對臺灣康軒數學、芬蘭 L 版數學、新加坡 M 版數學的 1 至 12 冊教科書內容進行分析，每個幾何問題都進行三次的歸類，包括認知型態、表徵型態、和涉及情境三種類目進行歸類，將分析的結果登錄於隸屬的類目中，並統計幾何問題在三種主要類目的分配次數和所占的百分比，以瞭解三國數學教科書中幾何教材編排的特色。雖然，本研究的分析是以量化分析爲主，除了量化的分析外，本研究也採質化分析，針對三國幾何單元內容的編排與呈現方式進行質性的分析比較，以更深入了解三國幾何教材呈現的異同。

肆、研究結果與討論

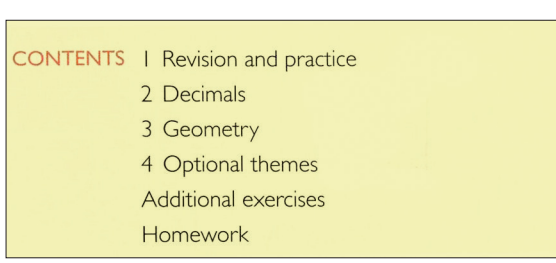
一、三國幾何教材版面編排與內容比重之比較

（一）版面編排

首先從目錄頁來看，可以發現芬蘭目錄的呈現最爲簡略，只寫出單元名稱（如 Geometry），而臺灣和新加坡除了呈現單元名稱外，還會在單元下方明確寫出該單元所要學習的內容，如角度、周長、面積等（圖1）；在單元標題頁方面，三國都會明確寫出單元名稱，臺灣在此頁會以插圖或照片來連結幾何概念相關的生活情境，引發學習的動機，而芬蘭和新加坡則直接呈現數學問題（圖 2）；在單元結束後，三國都有練習題讓學生複習此單元的概念，但芬蘭會設計“Decide for yourself”讓學生可以自己決定要用什麼方式去解決問題，以及“Brain-teasers”讓學生運用邏輯思考與推理來解決問題，而新加坡除了練習題外還設計“Math Journal”讓學生釐清該單元的觀念，也設計“Put On Your Thinking Caps！”讓學生思考比較困難的問題（圖 3）。相較之下，臺灣設計的練習題以例行性問題爲主，缺乏高層次思考問題的設計，不過高年級幾何單元結束後設計的「練習百分百」練習題中，會以條列的方式呈現該單元所學到的重點或公式，名稱爲「重點整理」。

在問題的種類上，三國數學問題都有例題和練習題兩種，都以例題來輔助教學，再以練習題加強學生的計算和概念複習。其中在例題方面，臺灣和新加坡較爲類似，在幾何量的例題中，多使用情境題，有小人物在旁對話，除了有完整的解題過程外，也會歸納結論和計算技巧；而在非幾何量的例題中，則會以幾何圖形或實際圖案爲主，搭配文字的說明（有時由小人物來說明），來說明幾何的性質或概念（如對稱）。不過兩國在小人物的對話內容略爲不同，臺灣呈現的是思考的過程或觀念釐清，而新加坡多爲提示學生解題技巧。而芬蘭的例題則是在活動的首





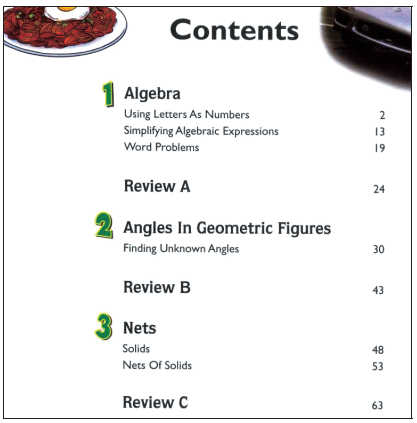


圖 1　臺灣、芬蘭、新加坡目錄頁範例

資料來源：楊瑞智（主編）（2010：2）；Kheong, Soon, & Ramakrishnan（2010: 1）；Saarelainen（2010b: 2）。



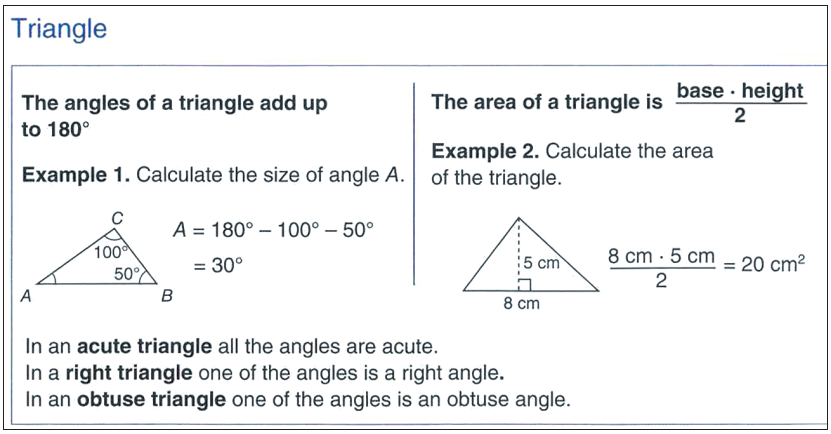
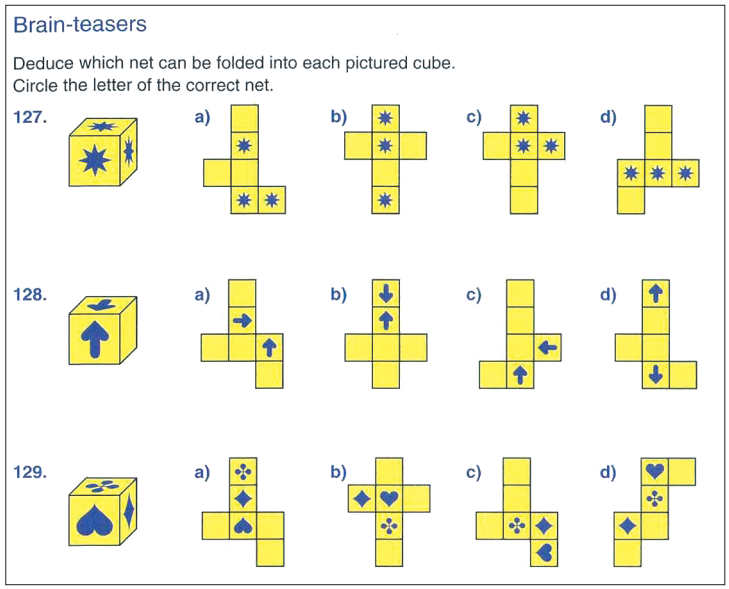


圖 2　臺灣、芬蘭標題頁範例

資料來源：楊瑞智（主編）（2009c：37）；Saarelainen（2010b: 68）。



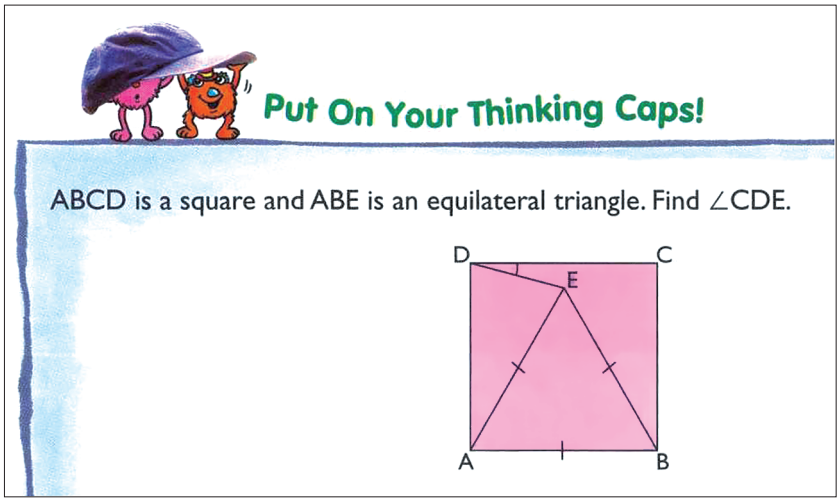


圖 3　芬蘭、新加坡單元後高層次練習題範例

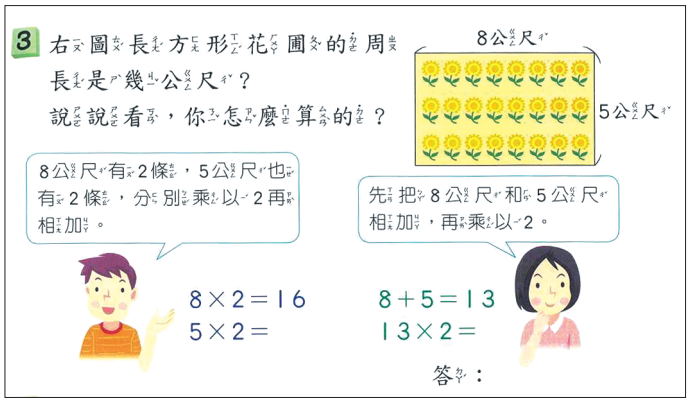
資料來源：Kheong, Soon, & Ramakrishnan（2010: 42）；Saarelainen（2010b: 92）。

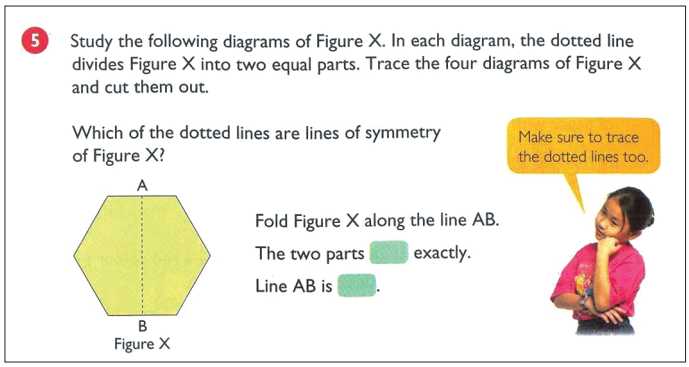
頁，以一個方框說明解題所需使用的公式，透過問題來直接呈現解題過程與技巧，或直接以文字和圖形搭配來宣告其定義（圖 4）。在練習題方面，三國並沒有很大的不同，都出現在例題之後，包括了計算題、文字題、和圖表題等，不過新加坡會高度引導，透過填空的方式來引導學生解題，而芬蘭的練習題數量非常多，且先呈現基本運算的問題，再呈現文字題和需思考與推理的問題。臺灣和新加坡在整體版面編排上較爲類似，芬蘭的版面編排較爲簡單，且例題的數量也遠少於臺灣和新加坡。

（二）幾何內容比重

臺灣每個年級都有 2 個以上的幾何單元，四至六年級都有 6 個幾何單元，全部有 26 個單元（占 26/113）。芬蘭每個年級只有 1 個幾何單元，共 6 個（占 6/54），而新加坡除了一年級有 1 個幾何單元外，其餘年級都有 3 個以上的幾何單元，共 23 個單元（占 23/93）。若更細部的從幾何問題的數量來看，臺灣 1-12 冊中全部有 4,914 題問題，幾何問題有 991 題，占全部問題的 20.17%，而且以四至六年級的幾何問題數較多（分別爲 225, 295, 253 題）。芬蘭雖然題數最多，在 12 冊中有 12,018 題問題，但幾何只有 1,028 題，占全部的 8.55%，五、六年級的幾何問題最多（分別爲 303, 368 題）。新加坡在 12 冊中有 6,827 題問題，幾何有 1,287 題，占全部的 18.85%，以四至六年級的題數最多（分別爲 248, 345, 399 題）。由此來看，臺灣與新加坡幾何單元和幾何問題所占的比例接近，分布也相似，而芬蘭幾何內容的比重相較之下較低，且較集中在五、六年級。

總結來看，臺灣和新加坡在版面編排和幾何內容比重上都較爲相似，包括目錄頁和例題的呈現方式、幾何問題分布的比重等，但在練習題的設計上，芬蘭和新加坡都有設計高層次開放思考的問題，臺灣較爲缺乏。若從單元中幾何教學活動的內容來看（單元內都有數個教學活動，每個活動均涉及幾何的主要概念，如面積），三國幾何概念的編排都是從觀察來描述與辨認簡單幾何形體開始，逐漸到認識水平、垂直的





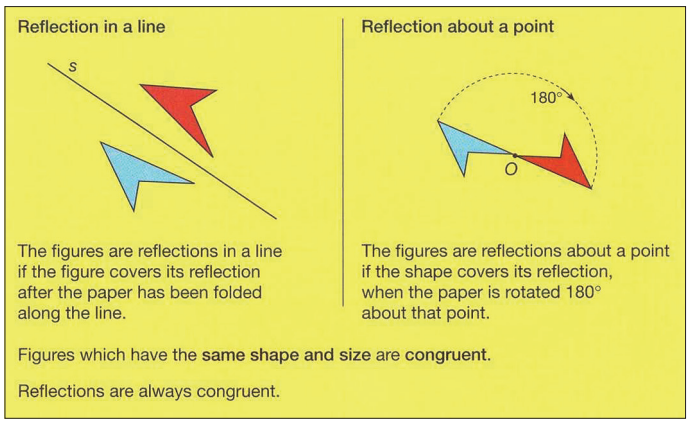


圖 4　臺灣、新加坡、芬蘭幾何例題範例

資料來源：楊瑞智（主編）（2009b：33）；Lee & Yong（2008: 125）；Saarelainen（2010a: 84）。

現象，之後再透過操作的方式來認識形體的基本性質與定義，最後瞭解形體間的關係並利用形體的幾何性質來進行角度、面積與周長等幾何量的計算。

二、三國幾何問題類型之分析比較

三國幾何問題依解題認知需求高低來進行分類，其分析結果如表6。從表 6 來看，三國幾何問題均以低認知需求的問題爲主，臺灣、芬蘭、新加坡低認知問題占的比例分別是 68.72%、75.97%、70.24%，其中又以無連結程序型問題居多。這是因爲三國幾何單元呈現，多先說明定義、公式或解題技巧，之後學生只需要按照定義或是公式便能解決問題，但在計算角度、周長、面積、體積和表面積時，並不是只要列出公式就能得到答案，大多還需計算程序才能得到答案，所以此類型問題比例最高。臺灣與芬蘭在記憶型問題所占的比例接近，臺灣與新加坡在具連結程序型問題的比例接近。整體來說，三國幾何教材的內容，都以低認知的問題類型爲主，其中，芬蘭所占的比例最高，這是因爲芬蘭在介紹定義或說明解題方法後（記憶型問題），會呈現大量無連結程序型的練習題供學生練習所致。作數學的問題只有新加坡有 2 題出現在 1A，題型類似，都是讓學生發現上一題圖形的規律後，要求學生用電腦創造新的規律，再問同學下一個出現的圖形是什麼（圖 5）。這 2 題需要學生設計與創造規律與解題方法，故屬於作數學，臺灣與芬蘭則無此類型的問題。

三、三國幾何問題呈現方式之分析比較

從三國教科書中幾何教材例題和練習題的分布情形來看，可以發現臺灣和新加坡在例題的題數分別是 265 和 292 題，所占的比例相近，分別爲 26.74%和 22.69%，而芬蘭例題只有 40 題，占總題數的 3.89%，明顯低於臺灣和新加坡例題所占的比例；在練習題上，芬蘭有 988 題練習

表 6　三國幾何單元問題認知需求負荷表

問題類型		臺灣		芬蘭		新加坡	
低認知需求	記憶型	295 (29.77%)	681 (68.72%)	305 (29.67%)	781 (75.97%)	333 (25.87%)	904 (70.24%)
	無連結程序型	386 (38.95%)		476 (46.30%)		571 (44.37%)	
高認知需求	具連結程序型	310 (31.28%)	310 (31.28%)	247 (24.03%)	247 (24.03%)	381 (29.60%)	383 (29.76%)
	作數學	0 (0%)		0 (0%)		2 (0.16%)	
總計		991		1,028		1,287	

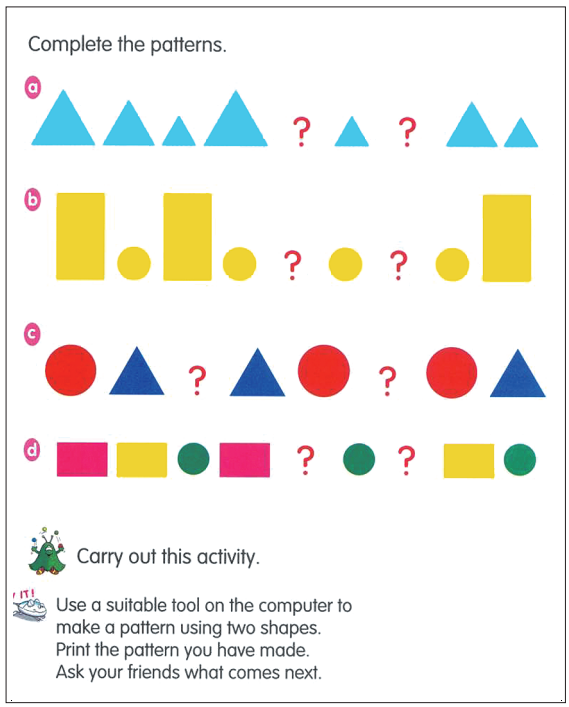


圖 5　新加坡作數學問題範例

資料來源：Kheong, Ramakrishnan, & Wah（2010：63）。

題，占總題數的 96.11%，而臺灣和新加坡分別有 726 和 995 題，占總題數的比例分別爲 73.26%和 77.31%；再從練習題和例題數量的比例（練習題／例題）來看，臺灣 1 題例題後會提供 2.74 題的練習題，新加坡提供 3.4 題練習題，而芬蘭則是提供高達 24.7 題的練習題給學生練習。整體來看，臺灣和新加坡使用較多的例題來做說明與示範，而芬蘭則是在簡短的例題示範後，便提供學生大量的練習，而且是聚焦在運算過程和技巧的練習。若進一步結合例題與練習題的類型來看，臺灣的例題以具連結型問題最多（101/265, 38.12%），芬蘭例題以記憶型問題最多（26/40, 65.00%），其餘都是無連結程序型問題，新加坡則以無連結程序型居多（140/292, 47.95%），而練習題的部分，三國都以無連結程序型居多（臺灣、芬蘭、新加坡各有 304, 462, 431 題，所占比例分別爲 41.87%, 46.76%, 43.32%）。以下，從問題的表徵形式與情境兩方面來分析三國幾何問題呈現的異同。

（一） 問題表徵形式之分析比較

數學表徵是一種數學概念呈現的方式，代表人們對數學概念的理解與應用。一般而言，具體和半具體的表徵比較容易讓人理解與學習，文字與符號的表徵較爲抽象與困難，且當學生能用不同的表徵來呈現同一個概念時，表示學生對概念有較深的理解。表 7 是三國幾何問題表徵形式的分布情形。從表 7 來看，三國幾何問題有六成左右以視覺型態來呈現，可見三國幾何問題大都以視覺的圖形爲主。臺灣和芬蘭以文字型態的呈現居次，但兩國呈現方式並不相同，臺灣在問題中常會透過文字說明給予學習者提示與統整，敘述較詳細，而芬蘭的文字敘述則相當簡單。新加坡是以聯合型態的呈現其次，可見新加坡較臺灣與芬蘭重視表徵之間的連結。數學型態所占的比例均不高，尤其臺灣和新加坡占的比例很低，這可能與幾何學習主要涉及平面與立體的圖形有關，純數學符號呈現的比例有限。

表 7　三國幾何問題表徵形式分布表

問題表徵形式	臺灣	芬蘭	新加坡
數學型態	19（1.92%）	99（9.63%）	33（2.56%）
文字型態	241（24.32%）	227（22.08%）	188（14.61%）
視覺型態	601（60.65%）	619（60.22%）	734（57.03%）
聯合型態	130（13.12%）	83（8.07%）	332（25.80%）
總計	991	1,028	1,287

若結合幾何問題表徵形式與類型來看，則發現三國在文字型態和視覺型態都以無連結程序型爲主；而在數學型態上，臺灣和芬蘭都以記憶型爲主，因爲數字型態只出現在單位換算的問題，而新加坡則因爲加入了平方根和立方根的概念，因此數學型態的問題仍以無連結程序型爲主；在聯合型態上，芬蘭和新加坡都以無連結程序型爲主，而臺灣以具連結程序型爲主。三國幾何問題表徵形式與問題類型的交叉分析表如表 8。

（二）問題情境之分析比較

情境的提供，有助於學生瞭解所學數學概念與生活之間的連結，讓學生在熟悉的生活經驗和情境中，進行有意義的學習並發展對數學概念的理解。表 9 是三國幾何問題有情境與無情境問題所占的比例，從中發現三國幾何問題情境分布的比例沒有太大的差異，都是以無情境問題居多，占全部問題的七成多，情境問題均占不到三成，三國情境題與無情境題的比例非常接近。若結合年級來看，則發現三國幾何情境問題多集中在低年級，可見三國幾何問題在低年級時較貼近學生生活，期望學生從生活中觀察具體物體，進而能分類、描述、辨認簡單的幾何形體和現象。

若結合問題情境與類型來看（表 10），發現三國在無情境問題明顯以無連結程序型問題居多，而情境問題則具連結程序型問題略多（芬蘭

表 8　三國幾何問題表徵形式與類型交叉分析表

表徵形式	臺灣				芬蘭				新加坡			
問題類型	數學	文字	視覺	聯合	數學	文字	視覺	聯合	數學	文字	視覺	聯合
記憶型	14	58	186	37	99	9	170	27	6	25	203	99
無連結程序型	4	92	257	33	0	133	296	47	27	100	309	135
具連結程序型	1	91	158	60	0	85	153	9	0	61	222	98
作數學	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
合計	19	241	601	130	99	227	619	83	33	188	734	332
總計	991				1,028				1,287			

表 9　三國幾何問題表徵形式分布表

問題表徵形式	臺灣	芬蘭	新加坡
有情境	258（26.03%）	260（25.29%）	305（23.70%）
無情境	733（73.97%）	768（74.71%）	982（76.30%）
有情境／無情境	0.35	0.34	0.31
總計	991	1,028	1,287

表 10　三國幾何問題情境與類型交叉分析表

表徵形式	臺灣		芬蘭		新加坡	
問題類型	情境	無情境	情境	無情境	情境	無情境
記憶型	59	236	36	269	63	270
無連結程序型	99	287	124	352	111	460
具連結程序型	100	210	100	147	129	252
作數學	0	0	0	0	2	0
合計	258	733	260	768	305	982
總計	991		1,028		1,287	

除外，但接近）。可見在須有概念連結、高認知需求的幾何問題中，三國多會提供情境，幫助學生組織與連結，其中臺灣提供的是生活中的眞實情境圖片，並透過生活中的人物，用對話的方法來呈現思考的歷程與結果；新加坡除了放入生活中的人物外，也以虛擬的卡通人物用對話方式來呈現想法；而芬蘭則會呈現生活中實際發生的問題，如在計算體積活動中，利用水族箱引起動機。而在無情境問題則較著重在以定義或公式解題，讓學生熟練運算技巧、定義與公式。

四、三國幾何教材的綜合比較與討論

從兩部分來分析三國國小幾何教材的異同。首先從幾何問題所占的比重和編排方式來看，發現臺灣和新加坡所占的比重較高，約兩成左右，芬蘭則占不到一成，芬蘭教科書中幾何內容的比重明顯偏低，且三國幾何問題出現在五、六年級的數量最多。可見在小學階段結束前，幾何教材所占的比例有增加的趨勢。從版面的編排來看，無論是在目錄頁或例題的呈現上，臺灣和新加坡類似，都呈現較完整的資訊，包括在目錄中明確列出各學習單元的內容、在例題中呈現完整的思考歷程與解題方法來引導學生學習，而芬蘭則呈現簡潔的風格，目錄只呈現大的學習主題（如幾何），例題也直接呈現公式或解題的方法。不過芬蘭和新加坡在練習題的設計上，都有專門的活動與名稱來呈現較具思考與挑戰的問題，而臺灣則以例行性練習題爲主；其次從幾何問題的類型與呈現方式來看，三國幾何問題有七成左右屬於低認知問題，尤其以無連結程序型爲主，可見三國國小階段幾何學習較強調的在於定義、公式或運算的部分。而在幾何問題呈現的方式上，三國都有六成左右的問題以視覺型態的表徵呈現，有超過七成的問題屬於無情境問題，這可能和幾何主題聚焦在平面和立體幾何形體的學習有關，無論是視覺型態的幾何問題或無情境的幾何問題，大都屬於無連結程序型問題。三國幾何問題呈現的差異在於例題和練習題的比例，臺灣和新加坡在每個例題後，大約提供

3 題左右的練習題，而芬蘭則提供多達 24 題練習題。整體來看，臺灣和新加坡無論在幾何教材所占的比重、編排方式、問題類型與呈現上都較爲相似，芬蘭幾何教材比重較低、呈現直接且簡潔、並提供大量且多元的練習。

三國比較起來，臺灣較強調幾何學習過程中融入情境的重要性，這從每個單元都提供情境扉頁、例題大都提供情境可以看出，這樣的呈現是因爲臺灣數學課程的目標強調數學的學習應與生活連結，希望學生從生活情境中去察覺可能蘊含的數學概念，並進一步的加以轉化與解題（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003）。強調情境對數學學習的重要和許多文獻的主張相一致（Barton, 2009; Gutstein, 2003; Ensign, 2005）。另外，研究上也指出問題認知類型的高低，會影響學生數學學習的焦點與對數學的態度（Henningsen & Stein, 1997; Silver, Mesa, Morris, Star, & Benken, 2009; Stein et al., 2007），但三國幾何問題大都以低認知問題爲主，從相關的研究來看，三國學生在國小幾何教材學習時，會聚焦在定義、公式與運算程序的熟練，而較忽略意義與概念的連結，這是三國共同可能的問題。而在表徵的形式上，三國聯合型態的表徵除新加坡外，所占的比例均不高，從多重表徵的觀點來看，可能會減少學生在不同表徵之間連結與理解的機會（Lesh et al., 1987; Zhu & Fan, 2006）。整體來看，三國國小幾何教材在問題類型、表徵形式、和問題情境的比例分布均相似，但臺灣和新加坡在版面編排、例題呈現、例題／練習題所占比例上較爲相似，三國幾何教材的綜合比較如表11。

表 11　三國幾何教材的綜合比較表

分析類目		臺灣	芬蘭	新加坡
問題類型比例	最高	無連結程序型	無連結程序型	無連結程序型
	最低	作數學	作數學	作數學
問題表徵比例	最高	視覺型態	視覺型態	視覺型態
	最低	數學型態	聯合型態	數學型態
問題情境比例	最高	無情境	無情境	無情境

伍、結論與建議

一、結論

本研究採用內容分析法，以數學問題爲單位，對臺灣、芬蘭與新加坡國小數學教科書幾何教材進行分析比較。結果發現，在幾何教材整體的編排上，臺灣與新加坡無論在幾何單元的名稱與例題的呈現上，都提供較詳細的資訊，包括在單元名稱上，明確呈現各單元學習的幾何概念（如「柱體的體積」），在例題和練習題的呈現上，臺灣的例題提供不同的思考歷程，鼓勵學生說出自己的想法，從不同的解題思考中來獲得數學概念，之後進行類似問題的練習。新加坡的例題則是呈現定義和解法後，透過「填空」方式的引導，讓學生以同樣方法來模仿解決類似的問題，之後再呈現較具挑戰的開放式練習題。而芬蘭的幾何單元名稱一律爲“Geometry”，無法從單元名稱中了解單元學習的幾何內容，而例題也以「直接介紹」的方式來呈現概念和解題方法，之後呈現大量與例題類似的問題，通常以簡單的計算問題爲主，讓學生熟練並具備基本的運算能力後，再呈現較複雜的生活問題與腦力激盪問題。而在幾何教材的比重上，臺灣和新加坡相近，約占兩成，而芬蘭則不到一成。三國幾何教材的問題類型與呈現方式相似，均以低認知的問題居多（約占七成），尤其以無連結程序型問題最多；在表徵形式上以視覺型態居多（約占六成），這可能與幾何學習主題聚焦在平面與立體圖形有關；而在問題的情境上以無情境的問題居多（約占七成），表示在幾何學習上與學生生活連結的問題有限。三國差異比較大的是在例題／練習題的比例上，臺灣和新加坡1題例題後，約有3題練習題提供學生練習，而芬蘭則提供24題練習題，這可能和各國對於例題功能的定位不同有關（引導vs.示範）。如果再結合例題與練習題的內容來看，似乎反映了三國教材中對於數學學習取向的不同：臺灣希望從生活情境中來引發概念學習的需求，並在不同的解題思考與溝通中來建立數學概念的理解，再藉由簡單的練習來強化已有的理解；芬蘭則以示範來培養學生的基本概念與演算能力，並

在大量練習中建立基本能力後，再應用到更生活化與複雜化問題的解決；而新加坡則介於兩者之間，兼顧了引導與示範，讓學生在模仿中學會同類型問題的解法，再透過不同類型練習題的解題，來延伸與強化原有的學習。對於數學學習取向的不同，使得三國在例題／練習題的比例上，以及練習題的類型上都有所不同。究竟三國教材主觀編輯的理念是否與客觀結構呈現的特色相符？或是不同數學學習取向對於教師的教學或學生的學習影響爲何？這些都需要進一步的檢視與探討。不過，從例題／練習題的比例與練習題的數量上得知，芬蘭學生在數學學習中，練習與熟練的機會並不少。此外，在練習題的類型上，新加坡與芬蘭的設計較臺灣多元，且特別設計具有挑戰性的問題（如芬蘭的“Brain-teasers”），供學生來思考與發展高層次的推理能力。

二、建議

本研究根據上述發現，提出以下幾點供現場教師教學、教科書編輯者與研究者後續探討的參考。首先，在教師的教學上，本研究發現臺灣國小幾何問題偏向低認知問題，練習題也以例行性問題爲主。根據國內外的研究顯示（徐偉民，2013b；Grouws et al., 2004; Stein et al., 2007），教師教學時，大都採用教科書中的數學問題爲主。由此來推論，臺灣國小學生在幾何單元學習時，可能聚焦在低認知且例行性幾何問題的學習。因此，一方面建議教師在幾何教學時，除了解教科書中所提供的幾何問題外，多提供學生進行幾何推理與思考的機會，或是設計一些像芬蘭腦力激盪的問題，增加學生以高認知的方式學習高認知幾何問題的機會，以擴展學生幾何學習的成效。同時，也建議教科書編輯者，可以在幾何單元多設計一些高認知的問題（尤其是作數學的問題），或是多增加幾何問題與生活情境的連結，讓學生在發展更高層次幾何思考的同時，更瞭解所學幾何概念與生活的連結；最後，在後續的研究上，本研究發現三國幾何教材的呈現，似乎反映了不同的編寫理念，以及對於數學學習取向與觀點的不同。因此建議未來研究者，可以探討在三國不同

學習取向的觀點下，對於教室內教師的數學教學以及學生數學學習的影響。包括教師如何使用教科書？如何與教科書的內容與編寫的理念互動？因爲過去研究發現，教師在使用教科書時扮演的是主動詮釋的角色，決定呈現哪些教科書的內容，以及如何呈現（Remillard, 2005）。同時也進一步的探討，三國不同編寫理念與教師教科書使用對於學生幾何學習的影響，以作爲日後教材編修或師資培育計畫的參考。

參考文獻

王文科（2002）。**教育研究法**。臺北市：五南。

王石番（1996）。**傳播內容分析法：理論與實證**。臺北市：幼獅文化。

左台益（2002）。Van Hiele 模式之國中幾何教材設計。**中等教育，53**（3），44-53。

吳麗玲、楊德清（2007）。臺灣、新加坡與美國國小五、六年級分數教材佈題呈現與知識屬性差異之研究。**國立編譯館館刊，35**（2），75-86。

徐偉民（2011a）。數學課程實施：一位國小資深教師的個案研究。**科學教育學刊，19**（2），101-122。

徐偉民（2011b）。三位六年級教師數學課程實施之比較。**教育研究集刊，57**（2），85-120。

徐偉民（2013a）。國小數學教科書數學問題類型與呈現方式之比較分析——以臺灣、芬蘭、新加坡爲例。**科學教育學刊，21**（3），263-289。

徐偉民（2013b）。國小教師數學教科書使用之初探。**科學教育學刊，21**（1），25-48。

徐偉民、林美如（2009）。臺灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。**彰化師大教育學報，16**，49-75。

徐偉民、徐于婷（2009）。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。**教育實踐與研究，22**（2），67-94。

徐偉民、黃皇元（2012）。臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析。**課程與教學季刊，15**（3），75-108。

徐偉民、董修齊（2012）。臺灣與芬蘭國小數學幾何教材內容之分析。**當代教育研究季刊，20**（3），39-86。

翁秉仁（2003）。**臺灣中小學數學教育的問題。**九年一貫課程綱要修訂原委說明會演講稿。取自 www.wfu.edu.tw/~math/course/92-s-05-05.doc

國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域（2003）。

國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域（2008）。

國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域（2000）。

康軒教育網（2011）。**關於康軒經營成果**。取自 http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go_Sub_Topic=08

陳之華（2010）。**成就每一個孩子：從芬蘭到臺北，陳之華的教育觀察筆記**。臺北市：天下雜誌。

陳仁輝、楊德清（2010）。臺灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊，18**（1），43-61。

楊瑞智（主編）（2009a）。**國民小學數學**（第五版，第一冊，一上）。臺北縣：康軒。

楊瑞智（主編）（2009b）。**國民小學數學**（第二版，第五冊，三上）。臺北縣：康軒。

楊瑞智（主編）（2009c）。**國民小學數學**（第二版，第七冊，四上）。臺北縣：康軒。

楊瑞智（主編）（2010）。**國民小學數學**（第六版，第十二冊，六下）。臺北縣：康軒。

楊德清、施怡眞、徐偉民、尤欣涵（2011）。臺灣、美國和新加坡小一數學教材內容之比較研究。**課程與教學季刊，14**（2），103-134。

歐用生（2000）。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發（主編），**教育研究法**（頁229-254）。臺北市：師大書苑。

Anderson, C. W. (2003). How can schools support teaching for understanding in mathematics and science? In Adam, G. et al. (Eds.), *Transforming: How schools and districts can support change* (pp. 1-21). New York, NY: Teachers College.

Barton, B. (2009). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. New York, NY: Springer.

Blanton, M., & Kaput, J. (2002). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117-151.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: Macmillan.

CPDD. (2006). *Mathematics syllabus primary*. Singapore: Ministry of Education.

Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 28*(2), 146-180.

Ensign, J. (2005). Helping teachers use students' home cultures in mathematics lessons: Developmental stages of becoming effective teachers of diverse students. In A. J. Rodriguez & R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse*

classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy (pp. 225-242). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

Grouws, D., Smith, M., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. Mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 221-269). Reston, VA: NCTM.

Grouws, D. A., Tarr, J. E., Chávez, Ó., Sears, R., Soria, V. M., & Taylan, R. D. (2013). Curriculum and implementation effects on high school students' mathematics learning from curricula representing subject-specific and integrated content organizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 416-463.

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban Latino school. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 37-73.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhabit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., & Wah, L. P. (2010). *My pals are here! Maths* (2nd ed., 1A). Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2010). *My pals are here! Maths* (2nd ed., 6A). Singapore: Marshall Cavendish Education.

Lee, Y. C., & Yong, Y. S. (2008). *My pals are here! Maths* (2nd ed., 4B). Singapore: Marshall Cavendish Education.

Lesh, R., & Lemon, S. J. (Eds.). (1992). *Assesment of authentic performance in school mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problem of presentation in teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum.

Ling, L. Y. (2008). *My pals are here! Maths* (2nd ed., 4A). Singapore: Marshall Cavendish Education.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

NBE. (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved from http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_ curricula

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NRC. (2004). Framework for evaluating curricular effectiveness. In J. Confrey & V. Stohl (Eds.), *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations* (pp. 36-64). Washington, DC: National Academies Press.

Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 331-355.

OECD. (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000*. Paris, France: OECD publishing.

OECD. (2002). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris, France: OECD publishing.

OECD. (2003). *Education at the glance*. Paris, France: OECD publishing.

OECD. (2008). *PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world.* Paris, France: OECD publishing

OECD. (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do——Student performance in reading, mathematics and science* (Vol. I). Paris, France: OECD publishing.

OECD. (2013). *PISA 2012 results: What students know and can do——Student performance in mathematics, reading and science* (Vol. I). Paris, France: OECD publishing.

Pehkonen, E. (2007). *Problem solving in mathematics education in Finland.* Retrieved from http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf

Posner, G. J. (1989). Making sense of diversity——The current state of curriculum studies. *Journal of Curriculum and Supervision, 4*(4), 340-361.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211-246.

Saarelainen, P. (2009). *Laskutaito 3A in English.* Helsinki, Finland: WSOY.

Saarelainen, P. (2010a). *Laskutaito 5A in English.* Helsinki, Finland: WSOY.

Saarelainen, P. (2010b). *Laskutaito 6A in English.* Helsinki, Finland: WSOY.

Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal, 46*(2), 501-531.

Son, J., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117-142.

Stein, M. K., Smith, M.S., Henningsen, M.A., & Silver, E. A.(2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.

Tarr, J. E., Reys, R., Reys, B., Chávez, Ó., Shih, J., & Osterlind, S. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 247-280.

Tarr, J. E., Grouws, D. A., Chávez, Ó., & Soria, V. M. (2013). The effects of content organization and curriculum implementation on students' mathematics learning in

second-year high school courses. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(4), 683-729.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando, FL: Academic Press.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 609-626.