和算中的圓理表及其應用——開方溟式出商表

黃俊瑋[1]
（台北市立和平高級中學數學教師、本會會員）

摘要　傳統開方術可處理一元高次方程式開方求數值解的問題，和算家小出兼政則進一步提出求無窮多項方程式之根的方法，並將這類式子稱為「開方溟式」。他在《圓理算經》中造出三種「開方溟式出商表」，利用這些表可將開方式 $0=r+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...$ 之中的 x 表示成 r 的冪級數展開式，並藉以求得此方程式的一個近似數值解。小出更進一步利用此開方表，處理圓理相關問題。已知弦長與直徑求弧長之「弧背術」是傳統和算家們所感興趣的問題，而《圓理算經》中不僅利用圓理表將弧長與弧積表示成直徑與弦長的冪級數展開式，並反過來利用「開方溟式出商表」，在已知直徑與弧長的條件下，求得弦長之冪級數展開式。本研究主要透過文本分析，考察並探討和算家如何用表求弧背公式，以及如何用表將弦表示成弧長與直徑之冪級數展開式的過程。

關鍵字：和算、數學史、圓理算經、開方溟式

一、前言

江戶初期和算家們主要的數學知識活動，是設計問題與求得問題所對應的公式解－術。但是到了十九世紀時，各類數學「表」成為和算家研究的新焦點，這些表的內容往往跳脫單純的數值表，一方面呈現出許多與代數、幾何關係或性質，同時也成為當時和算家用來解決各類圓理問題的重要工具。因此，到了十九世紀初期，和算家的數學研究成果不再只局限於題－答－術的形式，而涵蓋了許多的圓理表。

例如 19 世紀的數學家和田寧（Wata Yasushi,1787~1840），他最主要的貢獻在於發明「圓理豁術」，並創製許多「圓理表」，應用於許多複雜幾何問題的求解過程中。可惜他的著作因 1836 年的一場火災而亡佚，所幸其弟子內田五觀（Uchida Itsumi, 1805~1882）與小出兼政（Koide Kanemasa 1797~1865）等人，整理過去和田寧所授之傳書而得以保存這些研究成果。例如小出兼政於 1842 年編成《圓理算經》一書，便保留了和田寧的諸多研究成果，該書的自序中特別提到：「凡圓理之法，用表得解術者，皆始自和田子，無製表之術，稱不得捷徑之術」。可見，和田寧是透過造表得術的方式，得以更快速地解決各類圓理難題，帶動了和算之發展。[2]

黃俊瑋，台北市立和平高級中學數學教師。電郵：austin1119@gmail.com

[1] 本文由筆者於 iCHSTM 2013 大會上的報告內容進一步整理、改寫而成。2013 年 7 月 21（一）至 7 月 28 日（日）於英國的曼徹斯特大學(University of Manchester)所舉辦，為期一週的「國際科學、技術與醫學史會議」(International Congress of History of Science, Technology and Medicine，簡稱 ICHSTM)，可說是國際科學、技術與醫學史相關領域中的最大盛會。筆者與台灣 HPM 團隊一同參與此盛事。
[2] 參考洪萬生編，《數學東亞穿越》，頁 80。

本文將從和算發展脈絡中常見的「開方」問題談起，透過文本的分析與考察，說明《圓理算經》中與開方相關的數學表─開方溟式出商表─之內容與意義，以及和算家如何利用此表求解圓理相關問題。

二、從傳統開方翻法到開方溟式

和算的發展的脈絡中，「開方」具有兩個意義。其一與求平方根，亦與二項展開式有關，其二則與多項式方程式的求解有關。十八世紀松永良弼等和算家，利用 $(a+b)^{1/2}$ 之冪級數展開式進行開方，而後十八世紀末期的和算家發展出 $(a+b)^{1/n}$ 之展開式，到了十九世紀和田寧則以表的方式，表示出 $(a+b)^{m/n}$ 展開式的各項係數，亦即求得了二項式定理，其指數為有理數的展開式。另外，十八世紀末的和算家安島直圓，也透過造出指數表加速開高次方、求數值解的過程。

至於和算家解求多項方程式的方法，傳自《算學啟蒙》等中算書，並得力於和算家關孝和在傍書法、消元法、方程論的研究，成為和算家解題之利器。例如關孝和在《發微算法》（1674）書中所解之幾何問題，大多先立天元再依據題目所給的條件與已知性質列得方程組，並經代數運算與消元，最終得一元高次方程式，再利用開方（翻）法，[3]求得一元高次方程式的近似數值解。而這類代數化幾何問題，也一直是和算發展的重要特色之一。

事實上，關孝和與建部賢弘時期，還依據未知數的數量將問題分成見題、隱題、伏題、潛題四類，他的重要著作《三部抄》包含〈解見題之法〉、〈解隱題之法〉與〈解伏題之法〉三部份，分別對應了這四類問題的前三類。又如學士院所藏，關流藤田貞資抄寫的關流免許目錄，則包含了見題免許、隱題免許與伏題免許等三種段位，而《大成算經》卷二十「潛題演段例」，則進一步增加討論了潛題類問題。[4]其中，見題類問題為不需設未知數且不用天元術之問題，隱題類問題則需設立一個未知數，一般透過術文中的演算法，可程序性地導出一多項方程式，進而透過開方翻法求其數值解。而伏題類問題，與多元高次代數方程組有關，問題中需設立多個未知數，經問題的條件與相關性質得多元高次多項方程組，可透過上述關孝和〈解伏題之法〉中的相關方法對方程式進行消元、化簡進而求解之。最後的潛題則是無法列出代數方程的數學問題。[5]

有關解隱題與伏題的研究，早在十七世紀末，關孝和等和算家便已取得了相當完整而系統性的發展。1685 年，建部賢弘所著《發微算法演段諺解》中的「演段起例」提到：

> 凡題有見、隱、伏三類，見題以全、折之法隨正、變二矛求所問；隱題立天元一得真、虛二數問。此二題之術《算學啟蒙》現其法則，然雖立天元一如意求之，相消數容易而難見，則云伏題也。伏題有單伏、眾伏，以記於此書之演段，推時不云單伏、眾伏，共得皆術。[6]

---

[3] 和算家所用的開方翻法，即相當於中算賈憲發明之增乘開方法。開方過程中，實「翻」相當於利用了「勘根定理」來判定根所存在的區間。

[4] 參考徐澤林，《和算中源》，頁 30。

[5] 參考徐澤林，《和算中源》，頁 25-30。

[6] 出自建部賢弘，《發微算法演段諺解》。引自徐澤林，《和算中源》，頁 23-24。

解穩題與解伏題的過程裡，和算家皆需設立未知數以求得方程式，利用傍書法可處理包含多個未知量或多個代數符號的方程式。同時，不管是隱題類或伏題類問題，最終皆可歸結得一元高次多項方程式：$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n=0$，而後利用開方翻法求其數值解。換句話說，和算家所處理的隱題與伏題類問題，皆與方程式的開方求根有關。至於一元高次多項方程式如何利用開方翻法開方求商，關孝和在所《三部抄》的〈解隱題之法〉裡，作了完整而系統性地說明，[7]而此開方翻法本質上即是傳承於中算的開方法，在此不多述。

到了十九世紀，和算家和田寧造出各類「表」，將傳統多項方程式的開方求根問題，推廣至「無窮」多項方程式的情況，此類方程式被和算家稱為「開方溟式」。以《圓理算經》為例，本書的第三部份羅列許多表，這些表不僅是解決數學問題的工具，同時也包含了許多數學性質與公式。其中的「開方溟式出商表」，可將方程式 $0=r+x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ 的解 x，表示成 r 的冪級數展開式。接下來，我們進一步探討《圓理算經》中與「開方溟式出商表」相關的內容。

三、開方溟式與開方溟式出商表的意義

如前所述，和算家在處理典型代數化幾何問題的過程中，主要依據已知條件與已知性質進行列式，再經消元、代換最終得到以所求量作為未知數的一元高次方程式，再利用開方翻法求得所求量的近似值。然而，除了處理傳統 n 次多項方程式的開方術之外，有些問題與無窮多項方程式的求解有關，因此，十九世紀的和算家和田寧，進一步發展出求解此類方程式的開方法，並收錄於小出兼政的《圓理算經》中：

> 凡開方式，有底、溟二，蓋開方乘數有限，是謂底式；無限，是為溟式，乃非用八態表中除表或八象表等，而施術者不得溟式也，舉於此者，依綴術開原溟式謂實級為負，他級皆為正，方級常為一個，一乘級以下以干名所命之式矣，所得之商表。[8]

上述說明指出，開方式又分成底式與溟式兩類，其中，次數有限者為開方底式－即多項方程式，而開方溟式則為次數無限的開方式－即無窮多項方程式。至於與開方溟式有關的問題，可見於《圓理算經》上卷〈其四，用開方溟式出商表例〉。[9]同時，小出兼政將相關公式表，以及何謂開方溟式的說明，置於《圓理算經》〈下〉的附表〈開方溟式出商表〉之中。他首先列出如下三種類型之「開方三原溟式」：[10]

原溟元式 $0=-r+x+\text{甲}x^2+\text{乙}x^3+\text{丙}x^4+\text{丁}x^5+\text{戊}x^6+\text{己}x^7+\text{庚}x^8+...$

[7] 詳細內容可參考黃俊瑋，〈關孝和的《解隱題之法》〉，HPM 通訊，第十三卷，第 2、3 期合刊，2010；以及林典蔚，《關孝和《三部抄》之內容分析》2012；或者徐澤林，〈中日方程論之比較〉，《自然科學史研究》，卷 18(3)，1999，頁 219。

[8] 出自小出兼政，《圓理算經》。引自徐澤林《和算選粹》，2008，頁 634 - 637。

[9] 參考小出兼政，《圓理算經》，1842 年。收錄於徐澤林《和算選粹》，2008，頁 520 - 523。

[10] 若以現代符號表示「開方三原溟式」，原溟元式為 $0=-r+x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ 原溟陽式為 $0=-r+x+a_2x^2+a_4x^4...+a_{2n}x^{2n}+...$。原溟陰式則為 $0=-r+x+a_3x^3+a_5x^5...+a_{2n+1}x^{2n+1}+...$。其中，小出特別補充說明「實級為負，他級皆為正，方級常為一個」，即開方溟式的常數項為負，一次項係數為 1 另外，我們可以發現，「陽式」是「元式」的三次以上奇數次項(偶數乘級)係數為 0 時的特例，而「陰式」則是當偶數次係數（奇數乘級）為 0 時的特例。

原溟陽式 $0=-r+x+甲x^2+丙x^4+戊x^6+庚x^8+\ldots$

原溟陰式 $0=-r+x+乙x^3+丁x^5+己x^7+\ldots$

傳統的中算家或和算家開方求商（即開方翻法），主要皆是求多項方程式根的近似值，然而，對於上述開方溟式而言，並無法以傳統開方法求根的近似值。因此《圓理算經》中，針對前述三種不同的開方溟式，列出「依綴術開原溟式所得之商表」，其中共包含了「元式出商表」、「陽式出商表」以及「陰式出商表」三個商表，圖 1 所示為陽式出商表與陰式出商表的書影。[11]

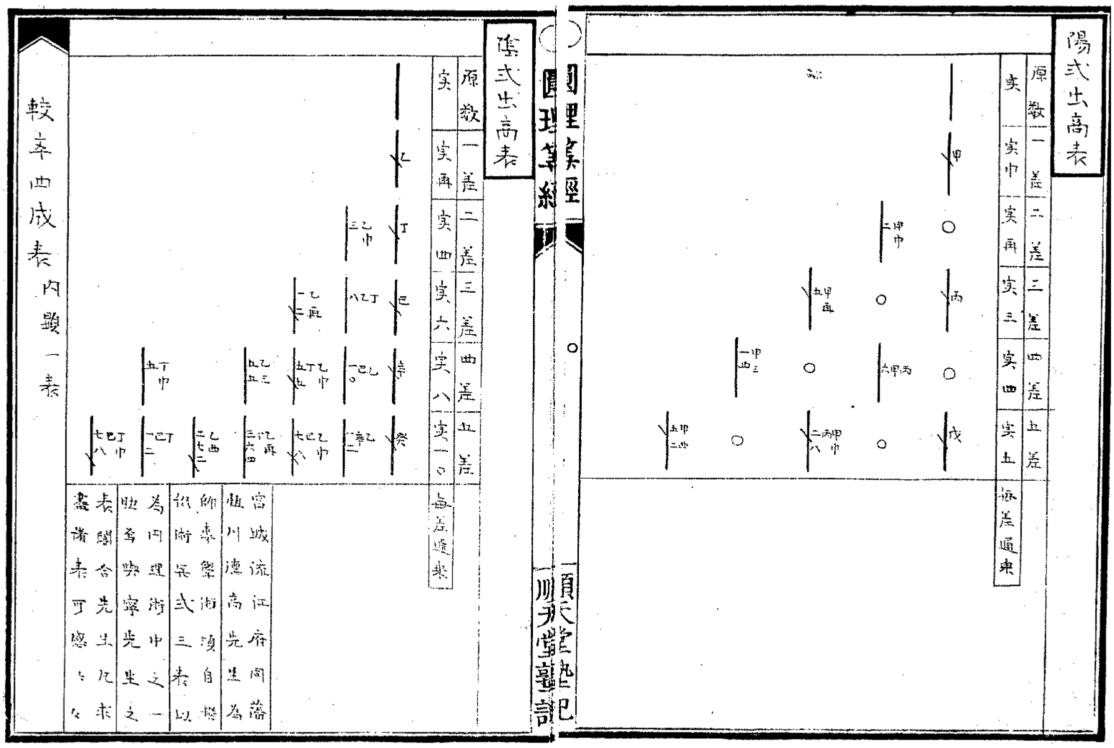

圖 1《圓理算經》書影－陽式出商表與陰式出商表

這些商表所列的內容，為原溟元式、原溟陽式及原溟陰式等三類無窮多項方程式的一般性公式解。利用此表可將前述開方溟式中的未知數 x，表示成實級（常數項）r 的冪級數展開式，其中，展開式中的各項係數，為原開方溟式各級係數的組合。若以元式出商表為例，可將前述原溟元式中的 x 表示成：

$$\begin{aligned}x=&-r+(-甲)r^2+(-乙+2甲^2)r^2+(-丙+5甲乙-5甲^3)r^3+\\&(-丁+6甲丙-21甲^2乙+14甲^4+3乙^2)r^4+\cdots\end{aligned}$$

又以陽式出商表為例，則可將前述原溟陽式中的 x 表示成：

[11] 小出兼政，《圓理算經》陽式出商表與陰式出商表書影。

$$x = -r + (-甲)r^2 + (2甲^2)r^2 + (-丙-5甲^3)r^3 + (6甲丙+14甲^4)r^4 + \cdots$$

小出兼政在《圓理算經》〈上〉的〈其四，用開方溟式出商表例〉中，也利用實例說明如何使用「開方溟式出商表」。首先，他特別提到：「溟式者，都以方級常為一個為矩，...，若方級不一個者，以方級遍除其式。」[12]這是因為書中所列的「出商表」，是建立在開方三原溟式的一次項為 1 時。因此，當解題的過程中，若遇到無窮多項式時，需先檢查一次項係數是否為 1，若該係數不是 1，則需將整個開方式同除一次項係數，即得滿足條件的開方式，接著便可將之與開方三原溟式作比較，以決定使用哪一個出商表，來求得根的展開式。接下來，筆者實際以《圓理算經》中的用表例，說明使用「開方溟式出商表」的時機以及查表求商的過程。

四、《圓理算經》用開方溟式出商表例

《圓理算經》〈上〉的〈其四，用開方溟式出商表例〉中，所舉的問題如下：「譬今有如圖圓內設弧，只言圓徑若干，弧背若干，問得弦術如何？」這個問題是給定圓的直徑與圓弧長，欲求截弦長。問題之後的「解曰」中提到：「截背而依術求弦，是術路之順而本意也，則有術可考，然凡題弧背者，逆也，逆必利用逆意，故以圓徑與弦先求弧背，後依術求弦為之術路。」[13]意即雖然和算家們已經找出「已知弧背與圓徑求弦之術」，[14]但此截背而求弦的方法，過程較為複雜，也非屬於《圓理算經》之中各類「截弦」法所適用的範疇。因此，作者認為應先以「圓徑與弦求弧背」，再依此弧背術所得之結果反求弦長。接下來，筆者分析小出兼政於「解曰」之中所使用的方法，藉以說明「開方溟式出商表」之應用。

首先，設所求弦為 x、圓徑為 R 、弧背為 s。檢圖 2 所示之「圓弧積線表」可表示出弧長的冪級數展開式：[15]

$$s = c\ (1+\frac{1}{2\cdot 3}t+\ \frac{3}{5\cdot 8}t^2+\ \frac{15}{7\cdot 48}t^3+\ \frac{105}{9\cdot 384}t^4+...)\ ，t=\frac{x^2}{R^2}$$

[12] 出自小出兼政，《圓理算經》。引自徐澤林《和算選粹》，頁 520。

[13] 出自小出兼政，《圓理算經》。引自徐澤林《和算選粹》，頁 520。

[14] 求此術的方法與相關術文置於《圓理算經》〈上卷〉「其三，用八態表例」裡。求弧背術曰：置弦，以圓徑除之，自而名率，置弦為原數，乘率、一冪乘、二三除，為一差，乘率、三冪乘、四五除，為二差，乘率、五冪乘、六七除，為三差，遞推之求逐差，以疊加於原數，得弧背，合問。

[15] 《圓理算經》的作者為小出兼政，將前述「已知弧背與圓徑求弦之術」所得之代數關係式，置於「圓弧積線表」之中的「題圓徑與弦問弧背一欄」（參見圖 3.1.2）。本表為小出兼政《圓理算經》之圓弧積線表，引自徐澤林，《和算選粹》，頁 632~633。

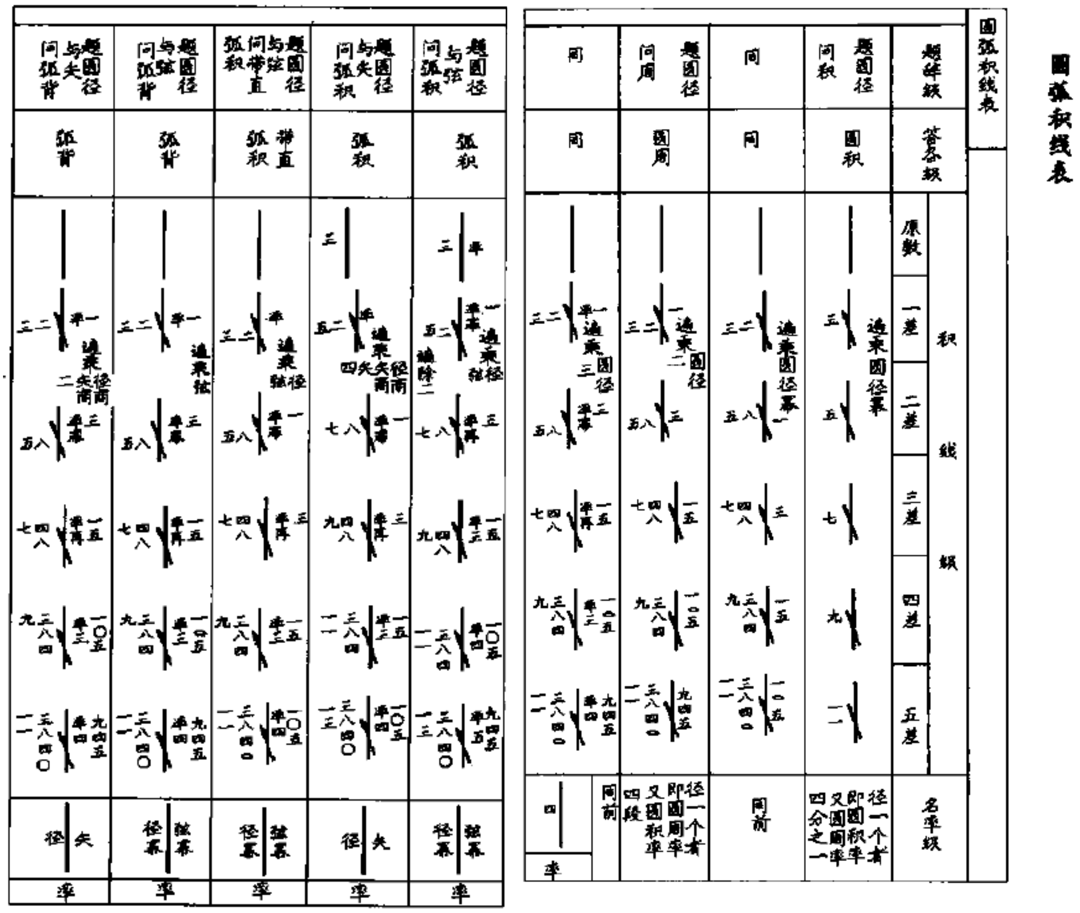

圖 2 《圓理算經》書影－圓弧積線表

這裡的「圓弧積線表」整理了許多幾何量之冪級數展開式。[16]小出兼政引用表中的「題圓徑與弦，問弧背」一欄，表示出弧背（s）與弦（x）與圓徑（R）的關係式。接著將率（即$t=\dfrac{x^2}{R^2}$）代入整理得弦式（以弦 x 為主變數之方程式），並以天干來表示各項係數：[17]

$$0=-s+x+\frac{1}{2\cdot 3R^2}x^3+\frac{3}{5\cdot 8R^4}x^5+\frac{15}{7\cdot 48R^6}x^7+\frac{105}{9\cdot 384R^8}x^9+\frac{945}{11\cdot 3840R^{10}}x^{11}+\cdots$$

實　　乙　　丁　　己　　辛　　癸

觀察上式之方級（一次項係數）為 1，因此其為標準的「溟式」。[18]接下來，他再「依三原溟式，視本溟式之相當，乃原溟陰式是相當」，即將此式與三類開方溟式比較之後可知其為「原溟陰式」，因此，利用「陰式出商表」所列之關係，再將上式中的實、乙、丁、己、辛、癸等項代入後可得：

[16] 表中的「題辭級」為問題的「已知條件與所求」、「答各級」則為「所求幾何量」，而「已知條件」與「所求幾何量」之間的關係，則以冪級數的形式，置於「積線級」之中。因此，此表的內容可視為和算家所求得，圓弧相關幾何量之間的諸多關係。

[17] 弦式即以弦為未知數的方程式。

[18] 當方級不為 1 時，只需如前所述地「以方級遍除其式」，如此便可化為滿足檢表條件的溟式。

$$x = s + (-乙)s^2 + (-丁+3乙^2)s^4 + (-己+8乙丁-12乙^3)s^6$$
$$+(-辛+10己乙-55丁乙^2+55乙^4+5丁)s^8+\cdots$$

再將前述，乙、丁、己、辛、癸等各項係數分別代入，經過整理，便可得下式：

$$x = s + (\frac{-1}{2\cdot 3d^2})s^2 + (\frac{1}{8\cdot 15d^4})s^4 + (\frac{-1}{48\cdot 105d^6})s^6 + (\frac{1}{384\cdot 945d^8})s^8 + (\frac{-1}{3840\cdot 10395d^{10}})s^{10} + \dots$$

一差　　二差　　三差　　四差　　五差

其中，原數為弧背 s，一差：$D_1 = (-\frac{1}{2\cdot 3d^2})s^2$，二差：$D_2 = (\frac{1}{8\cdot 15d^4})$，…。至此，透過「開方溟式出商表」，已經求解出前述以弦 x 為未知數的無窮多項方程式，即將無窮多項方程式的根 x 表示成弧長 s 的展開式。

然而，上式並無法直接看出各差之間的規律，亦無法表示成機械性的「術文」形式，因此，和算家再利用「逐忖術」，[19]令 $\frac{s^2}{d^2}$ 為率，弧背 s 為原數 D_0，接著逐項以「後差（D_k）」除以「前差（D_{k-1}）」，觀察所得結果並找出其中的規律，進而歸納出前項與後項之間的關係，從而可將原式表示成遞迴的關係式：「第 k 差為第(k-1)差先乘上率($\frac{s^2}{d^2}$)再除以 2k(2k+1)」，於是，可將弦表示成：

$$x = s - \frac{原數}{2\cdot 3}T + \frac{一差}{4\cdot 5}T^2 - \frac{二差}{6\cdot 7}T^3 + \frac{三差}{8\cdot 9}T^4 - \frac{四差}{10\cdot 11}T^5 + \cdots + \frac{(k-1)差}{2k(2k+1)}T^k + \dots$$

亦即：

$$x = D_0 - D_1 + D_2 - D_3 + D_4 + \cdots$$

其中，$D_0 = s$，$D_{k+1} = \frac{D_k}{2k(2k+1)}T$，而 D_k 為 k 差、$T = \frac{s^2}{d^2}$。這時，便可以將上式寫成程序性的「術」的形式：[20]

> 以圓徑除背，自之名率，置背為原數，乘率、二三除，為一差，乘率、四五除，為二差，乘率、六七除，為三差，遞推之求奇偶逐差，以疊減加於原數，得弦，合問。[21]

上述的術文，呈現出一種程序性與機械性的操作過程。利用已知條件中的「圓徑」與「背」可造出率，接著，逐步依照術文的操作流程，先求出「一差」、依「一差」可求得「二差」，依「二差」可求得「三差」，依此類推，由「k 差」可遞推求得「(k+1)差」。如此，當題目條件中的「圓徑」與「背」為已知的數值時，依此術文的程序性操作過程，便可利用「圓徑」與「背」的值，求得所求「弦」的(近似)值。

---

[19] 忖，即忖度，有思量的意思。

[20] 此式亦可表式成下述關係：$x = s + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{D_k}{(k+2)(k+3)}T$。

[21] 引自徐澤林，《和算選粹》，頁 523。

五、結語

本研究透過文本分析，考察並探討《圓理算經》中與開方有關的「開方溟式」與「出商表」的內容，說明和算家如何檢「圓理表」求得弧長公式，並反過來利用出商表將弦長表示成弧長與直徑之冪級數展開式。

開方的研究是傳統和算家感興趣的問題，除了傳承於中算的開方法，可用以處理一元高次方程式的開方求根問題外，和算家小出兼政在《圓理算經》中，提出了求解無窮多項方程式的方法，書中列出三類開方溟式出商表，並用此表來處理開方溟式（無窮多項方程式）：

$$0 = r + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

的開方求根問題，將上式中的未知數 x，表示成常數項 r 的冪級數展開式，且展開式中的各項係數，為原開方溟式各係數的組合。若係數為已知數時，則可藉以求得此方程式的近似數值解。此外，小出兼政在《圓理算經》中，更利用此開方表處理圓理相關問題。已知弦長與直徑求弧長之「弧背術」是傳統和算家們已解決的問題，書中不止利用表將弧長表示成直徑與弦長之冪級數展開式，並反過來利用「開方溟式出商表」，在已知直徑與弧長的條件下，求得弦長之冪級數展開式。在此脈絡下，和算家發展出的諸類圓理表，不只是獨立的數學知識，而是蘊含數學性質與關係，更是和算家研究問題、解決難題的重要工具與利器。

主要參考文獻

（一）一手文獻

1. 小出兼政，《圓理算經》，1842。收錄於徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008，頁 504 - 650。

（二）近人著作

1. 洪萬生編，《數學東亞穿越》。台北：開學文化，2018。
2. 徐澤林，《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。
3. 徐澤林，《和算中源》。上海：交通大學出版社，2013。
4. 黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡:1722-1852》，國立台灣師範大學博士論文，2014。

收件日期：2020 年 9 月 22 日

Yenri tables and related applications in Wasan－Tabkes about Kaiho Meishiki

Jyun-Wei Huang
（Mathematics teacher of Taipei Municipal Heping High School）

Abstract: The kaifang shu 開方術 can solve the problem of extracting the roots of polynomial equations. Koide moved forward a single step, apparently by analogy, to deal with the problem of finding the root of the equation of the form $0 = r + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$ which he called kaiho meishiki 開方溟式. He constructed three tables by which he could write the root x of $0 = r + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$ as a power expansion of r. Eventually, he found out an approximate solution of the equation. Moreover, he also used these tables to solve problems of the Yenri sankyo.

Traditionally, wasan practitioners were deeply interested in the problem of expressing the arc length in terms of the diameter and the chord in a circle. Koide was no exceptional at this point. However, he also turned around the problem by trying to express the chord in terms of the arc length and the diameter in a form of a power series with the previously mentioned tables.

Key words: Wasan, History of mathematics, Yenri sankyo, Kaiho Meishiki