黃俊瑋（2019）。
和算知識中的術、法、表之意義與特色。
臺灣數學教育期刊，6（1），53-77。
doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).002

和算知識中的術、法、表之意義與特色

黃俊瑋
臺北市立和平高級中學

知識從事者認為重要而值得探討的問題，及他們所尋求適當答案的種類，往往因社群而異。由這些社群所生產出來的知識種類也展現出差異。本研究貼近和算文本與脈絡，闡述和算家所發展的數學知識類型－術、法、表－探討它們的意義與功能，並比較之間的差異。「術」為程序性且機械性的演算法，可視為將問題的數據逐步作運算、操作、轉化，最終獲得答案的作業流程，有時也表徵了某些公式或定理。它既是和算家尋求的答案類型，也是求得數值解的重要媒介，並揭示了數量之間的抽象關係。「法」是程序性的數學運算或數學方法，藉以計算求得數值，或常被鑲嵌於術文中，作為執行演算法的子程式或作業流程中的子程序。「表」則記錄、濃縮了數學知識，呈現出數學概念與數學物件之間的靜態關係與結構，並作為重要認知工具，被用於求解問題以及探索、核證知識的過程中。和算家立法則、創諸表作為基礎數學工具，提出數學「問題」後，存在研究與實作兩種知識活動面向：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」。再者，據已知數（量），依「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具，在紙或計算表面上機械化地逐步操作、計算，求得相應的數值解。

關鍵詞：HPM、日本和算、知識論文化、數學史

通訊作者：黃俊瑋，e-mail：austin11119@gmail.com
收稿：2018 年 12 月 27 日；
接受刊登：2019 年 3 月 21 日。

Journal homepage: tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

Huang, J. W. (2019).
The meanings and characteristics of mathematic knowledge in Wasan - Jutsu, hō and Hyō.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *6*(1), 53-77.
doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).002

The meanings and characteristics of mathematic knowledge in *Wasan* - *Jutsu*, *hō* and *Hyō*

Jyun-Wei Huang

Taipei Municipal Heping High School

The problems that practitioners consider crucial and worth researching as well as the appropriate solutions they seek are vary by community. As a result, the types of knowledge produced by communities also differ. This paper aims to explain three types of knowledge, namely jutsu (術), hō (法), and Hyō (表), in the context of Wasan by identifying and discussing their meanings and functions and comparing them. Jutsu is considered a procedural and mechanical algorithm and can also be seen as a procedure by which operations and computations are applied to the values in mathematics problems step by step to result in an answer. Jutsu is an instrument for obtaining numerical solutions and the types of solution preferred by Wasan mathematicians. Sometimes, Jutsu connotes a formula or theorem and reveals an abstract relationship between values or magnitudes. Hō is a procedural mathematical operation or method through which Wasan mathematicians can calculate values, and it is often a subprogram or a subprocedure of the primary algorithm in the procedure of Jutsu. Hyō records and condenses mathematical knowledge and reveals the structures of and relationships between mathematical concepts and mathematical objects, and it is treated as an instrument for problem solving and is used in the processes of exploring and justifying knowledge. When Wasan mathematicians propose mathematics problems, two aspects of knowledge activities related to mathematics research and practice are considered: They construct Jutsu using the hō or the hyō or mathematical knowledge relevant to problems, and they operate and calculate step by step on paper or another surface used for calculating to obtain the numerical solutions according to the steps of Jutsu through the use of calculators.

Keywords: HPM, Wasan, epistemological culture, history of mathematics

Corresponding author：Jyun-Wei Huang，e-mail：austin11119@gmail.com
Received：27 December 2018;
Accepted：21 March 2019.

壹、緒論

數學史家林力娜（2010）基於凱勒（Evelyn Fox Keller）在《理解生命》（make sence of life）一書中的觀點，以《九章算術》為例，探討了古代中國的知識論文化。她在文中指出，從事者（practitioners）認為重要而值得探討的問題，以及他們所尋求適當答案的種類，往往因社群而異。由這些社群所生產出來的知識種類，也展現出差異。歷史學家在研究這些社群時，倘若不探討在社群內所發展出來的「知識的需求」（epistemic needs），便無法掌握重要特徵，來描述這些社群如何選擇其問題並闡述他們所要的答案。根據她的看法，我們必須同時考慮「某個特定的科學家群體所秉持的規範和習俗，在這些規範和習俗的基礎上，科學家賦予字詞－如『理論』、『知識』、『解釋』與『理解』甚至『實作』這個概念本身－意義」。

「問題－答案－術文」的呈現方式，是傳統中算的文本（如《九章算術》）的典型體例。換個角度來看，當時的數學家從事的數學知識活動，主要包含了問題的提出、求得（數值）答案、以及連結了問題與答案的演算法或公式。這樣的傳統，影響了漢字文化圈裡的數學文化與實作，而江戶時期的「和算」，主要依附在傳入的中算書而發展，具有類似的書寫體例，並同樣展現出對問題、答案與術的追求，然而，和算家也發展出在地化的數學觀點與特色。[1]

例如，和算家建部賢弘（2008）在《綴術算經》序言中，[2]提出他對數學研究的看法：「**夫算，立法則、究術理、計員數為事。**」換言之，他將數學知識活動分成三類，並在書中各提出四個問題作說明與討論。其中，「法則」是程序性的計算程序或方法（包含乘除法、約分之法、招差之法等）；「術理」一般可視為機械性的演算法或公式；而「員數」與求圓周長、弧長、體積、開平方等數學問題的數值解有關。若再考究和算文本，在和算家提出數學問題後，通常會以「數（量）」與「術」作為主要的答案類型，而法則雖是數學研究的對象，但一般被用於解題的過程，並非問題的答案主體。再者，由於「數」指的是數學家所關心的特定常數、所求的幾何量或者問題的數值解，較易於一般人理解，因此，本研究中，將特別聚焦在「術」與「法」的部份。

另一方面，十八世紀後，和算家也逐漸發展出另一種型態的數學知識－各類數值「表」與圓理「表」，這些「表」除了記載知識外，更兼俱其它的認知意義與功能。例如小出兼政（2008）在《圓理算經》序言中提到：「**凡圓理之法，用表得解術者，皆始自和田子，無製表之術，稱不**

---

[1] 本研究的主要內容，為江戶時期日本傳統數學，包含其知識社群的相關知識活動與知識發展。相較於中算與東算（韓國數學），一般以和算稱呼江戶時期所發展的日本傳統數學，並以和算家指稱當時的日本數學家。因此，本文中所討論的知識社群即和算家社群，知識從事者即和算家。

[2] 建部賢弘（Takebe Katahiro , 1664-1739）是關流創立者關孝和的弟子，他的《綴術算經》也被譽為最傑出的和算著作之一，一方面是他晚年的集大成著作，同時也在書中闡述了數學認識論與方法論方面的觀點。這本書完成後，亦被建部賢弘獻給當時的掌權者德川吉宗將軍，可見此書的重要性與意義。

得捷徑之解術。[3]」可見「表」作為解題工具上的重要性。該書前二卷內容，仍是數學問題集及其解法與答術，然而〈卷之下〉則以一整卷的篇幅，羅列了諸類數學表。同時，該書的編排順序並非以知識作分類，而是依「表」的類型來對問題分類，展現出「表」在當時和算研究的上重要意義。然而，綜觀目前有關和算的研究，主要以和算家之傳記、和算文本解讀、數學知識發展乃至數學社會史、數學文化相關，但尚未出現任何與知識論文化相關的研究。因此，本研究從知識論文化的觀點切入，考察 17-19 世紀間的重要和算數學文本，透過文本分析與歷史分析，探討和算文化中的知識需求－和算社群所關切的重要數學物件「術、法、表」，並比較這些數學物件之間的關係與差異，探討它們的特色以及相關的數學概念與認知意義。其中，「術」是機械性的演算法，通常可視為數學問題的公式解；「法」是一種程序性的數學運算、數學方法，例如乘除法、約分法、解方程式法則等皆是；「表」則是格子狀的矩形陣列，記錄數值或數學符號、數學物件以及它們的關係。

再者，過往 HPM 相關研究主要是數學史在數學教育的應用，以情意面向或數學概念的學習為目的，歷史作為輔具。本研究則嘗試從另一個方向著手，利用數學教育的理論來幫助數學史的研究。Sfard（1991）透過對數學概念發展過程的歷史分析與概念分析，提出數（如正整數、有理數、實數、複數）、對稱性或者函數等抽象數學概念，可藉由兩種方式理解與認知，包含結構性的靜態數學「物件」（object），或者操作性的動態數學「程序」（process），而此「程序－物件」二元性正為數學概念的一體兩面。她認為對數學概念的認知過程，一般是程序操作面向先於結構物件面向，且吾人透過對具體實物或低階數學概念的操作過程，認知新的數學概念，並且透過對具體實物或低階概念的操作，可將之內化成概念操作，進而物化成數學物件，得以進行運算操作。這樣的理論提供我們考察數學概念發展的一種新觀點。因此，本研究除了貼近一手文本，進行和算文本分析與歷史分析，並嘗試利用此認知理論與觀點，審視和算數學概念、數學物件─術、法、表─的發展脈絡與意義。對於數學史研究與數學教育之連結，提供更多元面向之論述與研究進路。

貳、「術」的意義與特色

設計問題是和算知識活動的核心，而這些問題主要是以「數（量）」和「術」作為所求的答案。林力娜（2010）認為，許多線索顯示，演算在古代中國數學占有核心地位，而最足以說明此事實的，便是《九章算術》以「算術」一詞為書名。而和算文本中的術與傳統中算的術，也有著

[3] 小出兼政（Koide Kanemasa, 1797~1865）的《圓理算經》主要收集了幕末最重要和算家和田寧（Wada Yasushi, 1787~1840）的數學研究成果，由於 1836 年發生於三田台町的一場大火，使得和田寧的重要研究成果付之一炬。因此，和田寧的研究成果，主要透過他的學生們記錄、整理而流傳。《圓理算經》便是小出兼政據和田寧遺稿彙編而成。

類似的意義與特性。「術」這個字經常被用來引介一連串的運算步驟，對於問題的數據－包括量（magnitudes）和值（values）－進行運算，以得出所求的量和它們的數值。林力娜也指出「術」有兩個面向，現存的著作展現出其中一個面向，也就是列出一組運算步驟的文本本身。然而，這些運算也意味著第二個面向的存在：亦即在某個「表面」上進行計算的演算法。因此，所謂的「術」並不只限於指示計算步驟而已，這些演算法以一組運算步驟的形式呈現。一方面，它們陳述了一種轉化的關係（a relation of transformation），並由此得出一個量（magnitude）。另一方面，它們被看成一連串的運算步驟，可以在用來計算的表面上操作，因而關聯到實際的計算動作，並得出一個數值（value）。

多數的和算文本裡，「術」同樣可視為一種演算法（algorithm），某些時候，「術」亦看成一個數學公式，許多術文的內容與現今熟悉的數學公式有關。例如關孝和（2008b）的《解見題之法》，便提到了求梯形面積之術：「置小頭，加入大頭，共得數以長相乘之，得數折半之，得積。」此術是利用梯形已知的「小頭」、「大頭」與「長」等條件，逐步計算出面積的演算法。同時，術文中也呈現了這些幾何量之間的關係：$\text{梯形面積}=\dfrac{(\text{小頭}+\text{大頭})\cdot\text{長}}{2}$，可視為梯形面積公式。

又或者書中提到的求方錐體積術：「置下方，自乘，以高相乘之，得數以三約之，得積。」此術一方面可看成利用「下方」（方錐底邊）與「高」等已知數據，求得體積的演算法，同時也可視為方錐的體積公式：$\text{方錐體積}=\dfrac{\text{下方}^2\cdot\text{高}}{3}$。又如關孝和（2008a）《括要算法》所提到的圭垛術：「置底子，加一個，以底子相乘，得數以二約之，得積合問。」此術可看成利用底子數，計算出圭垛總數的演算法，也可視為垛積公式：$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{(n+1)n}{2}$。[4]

除了可視為演算法或公式之外，也有些「術」的內容，本質上陳述了一個數學定理或性質。例和關孝和《解見題之法》提出下述問題與術文：「假如有勾股，勾若干，股若干，問弦。置勾，自乘之，加入股冪，共得數為實，開平方除之，得弦。」此術文的內容，本質上為勾股定理所蘊含的關係：$\text{弦}=\sqrt{\text{勾}^2+\text{股}^2}$，亦可看成利用「勾」與「股」求得「弦」的一種演算法。

另外，「術」通常具有程序性與機械性的特色，並呈現出轉化的關係，連結給定條件與所求數或量。換句話說，問題條件中給定的各數據或抽象的幾何量，透過「術」，可機械地且程序地依據演算法的每個步驟，進行計算、操作與變換，逐步將已知條件中的數（量），轉換成新的數（量），如此，最終得所求的數（量）。因此，「術」可視為連結了給定條件與所求數（量）的一種轉化關係。

---

[4] 垛積術本質上即級數公式，其中若將 $1+2+3+4+\cdots+n$ 個物依序排列形如三角，故以圭垛術稱之。

以安島直圓（2009a）所著《不朽算法》書中的第七問為例，[5]該問題所給的術為：「列子、乘丑、四之、平方開之、得平、合問。」此術的內容是一個包含了「列子」、「乘丑」、「四之」、「平方開之」四個程序性步驟的演算法（如圖 1 所整理），依此演算法，可將題設條件中「子」所代表的幾何量，逐步作轉換，先轉換成「子・丑」，再轉換成「4 子・丑」，最終轉換成所求的幾何量「平」。

$$\xrightarrow{\text{列子}} \text{子} \xrightarrow{\text{乘丑}} \text{子}\cdot\text{丑} \xrightarrow{\text{四之}} 4\text{子}\cdot\text{丑} \xrightarrow{\text{平方開之}} \sqrt{4\text{子丑}}\ (=\text{平})$$

圖 1　《不朽算法》第七問之施術流程圖

「術」除了呈現出一種動態（dynamic）的轉換關係，以及程序且機械性的操作過程外，它更揭櫫了一種「數學實作」的過程。換言之，它暗示了和算家如何從事數學知識活動：給定了「子」所代表的數值後，利用術中「列子」、「乘丑」、「四之」、「平方開之」等四個動作，依次在紙上或計算板上進行操作與運算，可逐步將「子」轉換成所求數值「平」。同時，「術」的內容亦可視為已知量與所求量之間的一種關係式，即「$\text{平}=\sqrt{4\text{子}\times\text{丑}}$」。

若再以《不朽算法》書中的第二十問為例，該問題為：「今有長立圓，長徑若干、短徑若干、如圖斜截之、横徑若干、問上下截積各幾何？」它是在已知橢球的長徑、短徑與橫徑等條件下，利用平面截此橢球，求所截出上下兩部份區域之體積。書中所給的術為：「短徑冪內減長徑冪、餘平方開之、得商以減短徑，餘寄位。自乘之，加横徑冪三段，乘寄位、以長徑及圓率乘之，得數以短徑一十二段除之，得上積，合問。」此術所呈現的程序性演算法，較前述第七問來得複雜，筆者將此術所代表的演算法流程整理成表 1。

[5] 本問題與菱形之內切圓有關。《不朽算法》是 18 世紀末期和算家安島直圓(Ajima Naonobu, 1732 - 1789)的作品，該書主要為問題集的形式，收錄許多重要的和算問題與解術。

表 1

《不朽算法》第二十問之術文與演算法

術文	術文所對應的程序性演算法
短徑冪內減長徑冪	$長徑^2 - 短徑^2$
平方開之	$\rightarrow \sqrt{長徑^2 - 短徑^2}$
得商以減短徑	$\rightarrow 短徑 - \sqrt{長徑^2 - 短徑^2}$
餘寄位	$\rightarrow 短徑 - \sqrt{長徑^2 - 短徑^2}$ （＝寄位）
自乘之	寄位・寄位
加橫徑冪三段	$\rightarrow (寄位)^2 + 3\ 橫徑^2$
乘寄位	$\rightarrow (寄位^2 + 3\ 橫徑^2) \cdot 寄位$
以長徑及圓率乘之	$\rightarrow 長徑 \cdot 圓率 \cdot (寄位^2 + 3橫徑^2) \cdot 寄位$
得數以短徑一十二段除之	$\rightarrow 上積 = \dfrac{長徑 \cdot 圓率 \cdot (寄位^2 + 3橫徑^2) \cdot 寄位}{12 \cdot 短徑}$

資料來源：研究者整理繪製。

由於執行上述演算法的過程中，所得代數符號較複雜之故，安島直圓在過程中作了「變數代換」的動作，他先將「$短徑 - \sqrt{長徑^2 - 短徑^2}$」寄位，亦即將這一串式子背後的演算法，計算所得的結果，先記錄、寄放在一旁的位置上，以待後續使用。而後續的演算法中，則以「寄位」指稱這一串複雜的式子（或計算所得結果）。最終，將已知條件中的「長徑」、「短徑」與「橫徑」透過此程序性的演算法，轉化成所求的「上積」。同時，此術也可視為下列關係式：

$$上積 = \frac{長徑 \cdot 圓率 \cdot (寄位^2 + 3橫徑^2) \cdot 寄位}{12 \cdot 短徑}$$

其中，$寄位 = 短徑 - \sqrt{長徑^2 - 短徑^2}$ 。

除了上述這類有限步驟的術之外，和算家求解問題所得之術，亦包含了無窮個步驟的「綴術」。我們以小出兼政（2008）所編著《圓理算經》中的得圓周術－已知圓之直徑求圓周長－為例，書中將圓與直徑之間的關係表示成程序性的演算法：「置圓徑，倍之，為原數，一冪乘、二三除，為一差；三冪乘、四五除，為二差；五冪乘、六七除，為三差，遞推之求逐差，以疊加於原數，得周（徑一個者即圓周率），合問。」筆者在表 2 之中，整理了此求圓周術的內容與相對應的演算法。

表 2

得周術之術文與演算法

術文	術文所對應的程序性演算法
置圓徑	圓徑
倍之，為原數	→ 2 圓徑（＝原數）
一冪乘、二三除，為一差	→ 原數 $\cdot \dfrac{1^2}{2\cdot 3}$（＝一差）
三冪乘、四五除，為二差	→ 一差 $\cdot \dfrac{3^2}{4\cdot 5}$（＝二差）
五冪乘、六七除，為三差	→ 二差 $\cdot \dfrac{5^2}{6\cdot 7}$（＝三差）
遞推之求逐差	→ 三差 $\cdot \dfrac{7^2}{8\cdot 9}$（＝四差）
	→ 四差 $\cdot \dfrac{9^2}{10\cdot 11}$（＝五差）
	→ ……
以疊加於原數，得周	周＝原數＋一差＋二差＋三差＋四差＋…

資料來源：研究者整理繪製。

從術文與演算法的比對不難發現，其為一種具遞迴關係的演算法，由已知條件「圓徑」可求得原數；由原數可求得一差；由一差可再得二差等等，最後再「遞推之求逐差」，利用前後差之間的關係與規律，逐項求得任意的第 k 差。和算家利用類似的演算法，可以程序且機械地不斷重複類似的操作過程。因此，這個演算法是一種隱含了「無限」步驟的演算法，可依據需求，持續不斷地操作下去。然實際計算求數值解（圓周長）的過程，可參照所欲求得數值的精確程度，來決定計算至多少項（操作多少個步驟）。當然，此術亦相當於表示出圓周長 L 與其直徑 R 之間的關係：

$$L = 2R(1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{15}{7\cdot 48}+\frac{105}{9\cdot 384}+\frac{945}{11\cdot 3840}+...)$$

綜合來看，「術」通常可視為一種演算法，可將已知數據動態地、程序地並且機械地逐步轉換成所求的數或量，同時，「術」也負載著數學公式或數學關係式的特性。而和算文本中提出的「術」，通常是一種概括性的演算法，揭示變量之間的抽象性關係。再者，「術」也可視為將題設條件逐步轉化獲得問題答案的作業流程，當問題的條件為既知的數值時，只需將這些數值，依「術」所揭示的作業流程，實際在紙或計算表面上逐步作操作、計算，最終可得出所求的值。

許多和算文本中，問題的「答案」並不再列出數值解，而僅列出抽象性、概括性的術作為問

題的答案，再指示可依此演算法代入問題條件中的數值（若有給定），計算求得數值解。一方面顯示他們偏好概括性地解題之外，也暗示了數學知識活動存在研究與實作兩個面向，包含依據已知性值進行探索「造術」的研究過程，以及實際依演算法操作「求數」的計算動作。

參、「法」的意義與特色

一、法的意義與特色

如前述，和算家將數學研究分成「立法則」、「究術理」、「計員數」三類，他們感興趣的數學知識活動主要為問題的設計與求解，而問題所探求的答案種類主要為「術」與「數」。至於法則─包含常見的因乘法、歸除法、約分法、招差法、開方法等─通常並非和算家求解問題的最終答案或目標，而是作為求解問題所依賴的「方法」或「工具」，是一種程序性的「數學運算」、「數學方法」或「數學操作」。接著筆者同樣以建部賢弘（2008）所著的《綴術算經》為例，介紹和算家常用的基本「法則」。首先，此書前四個問題的標題分別為探乘除法則、探立元之法、探約分之法與探招差法，其中的第一問包含了兩個與乘除法有關的問題，這兩個問題的術（演算法）分別為：「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也」與「置元粟數為實，以人數為法，除之，得每人分粟。」它們都是連結已知條件與所求的演算法，然而演算法中分別包含了「乘」與「除」兩個基本的「數學運算」，而乘除法便是解決這兩個問題所仰賴的法則。

以第一術為例，當中總共涉及了「置粟數」以及以「斛價乘之」兩個主要動作，第一個動作「置」為物理上的動作，而第二個動作「乘」則為一種數學操作上的動作，亦即執行「乘」這個數學運算（「乘」這運算本身又包含了若干個子操作），而「因乘之法」指的便是「乘」這個數學運算中所附屬的整個過程。儘管本問題中所求的是「數」（量），但和算家仍傾向於提出具概括性的「術」，而「法」則是作為執行或操作演算法（術）的其中一環，在實際求解的過程，透過「乘（除）法」這個程序，對已知數或量進行「數學操作」，計算求得數值解。多數和算文本中的「術」，皆涉及了某些數或量的乘除，而此二法便作為解決數學問題或執行演算法過程的基本法則。

該書的第二問，則闡述了何謂立元之法，並說明如何透過此法建立方程式，進而求得問題的解，並討論了此方法的優點。所謂的立元之法，便包含了設立未知數至最終求得方程式的整個過程。如同建部賢弘（2008）所云：「據理探索，有立元之法則而貫萬術。」即立元之法是和算家用以處理各問題的重要法則。另外，建部賢弘也進一步提到關孝和將立元之法推廣成解伏題之法，而此法是一套經由列式、消元等代數變換過程，以求解出含多個未知數問題的「法則」。被廣泛用於求解「伏題」類問題。另外，和算家求解問題的過程中，常會求得所求數或量的一元高次方程式，此時需依解方程式的方法「開方翻法」來求此一元高次方程式的數值解，而「開方

翻法」同樣是和算家解題施術過程中的常用法則。《綴術算經》第三個問題的內容與約分有關，建部賢弘藉此問題說明如何探求約分法則。再來的第四個問題則為垛積問題，建部賢弘以實際數據探得「招差法則」進而推得垛積術。此外，他也提出了方程法則，作為解聯立方程式的程序性方法。

這些「法則」看似簡單但實為重要且應用廣泛，是和算家解決問題、執行演算法的重要基礎。誠如建部賢弘所云：「**立法則，施術之原也**」，當「法則」建立之後，它們通常作為和算社群裡的基礎先備知識，這些知識既非算學研究關切的「問題」本身，亦非特定數學問題的「答案」，而是作為算學研究或計算求解時所仰賴的「工具」。無論是《綴術算經》所列的因乘之法、歸除之法、立元之法、約分之法、招差法以及方程法則，或者其它和算文本中所提出的解穩題之法、解伏題之法以及求開方式數值解的開方翻法等，各種「法則」廣泛地被和算家用於求解問題或執行演算法計算答案的過程中。這些法則可視為執行術（演算法）過程中的程序性知識，並如同既知的「子程式」，鑲嵌在「術」裡，術文中僅需言明「乘」、「除」、「約之」、「以幾乘方翻法開之」等數學運算或操作，不再詳細列出相關細節，從事數學知識活動者，便可依據相關「法則」所涉及的程序性方法，自行、自動執行相關計算與操作。

二、法與術

「法」可視為一種程序性的方法、運算或數學操作，而「術」通常被視為包含一系列機械性程序的演算法，且隱含某些關係或公式。乍看之下，兩者似乎雷同，然「關係性」、「機械性」以及「通用性」是兩者主要差異。接著，筆者從「法」與「術」的比較切入，說明兩者的差異，有助於釐清「法則」的意義。

諸如乘法、除法、開方法等法則，都是一種程序性的「操作」或「運算」，可視為一個或若干個操作或運算的組合，但操作本身不涉及關係。另一方面，以前面提到過的「**置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也**」為例，此術是一種從已知條件「粟數」逐步求得「價銀數」的演算法，亦顯示出「粟數・斛價銀＝價銀數」這些量之間關係。但「因乘之法」所強調的是「乘」這個動作或數學運算本身，而非關係的揭示。因此，「術」通常是包含了一連串操作歷程的演算法，並揭示了已知量與所求量之間的關係，而「法」指的則是完成某數學運算或數學操作的「方法」本身，一般與數或量之間的關係無直接關連。

再者，雖然「術」與「法」皆具有程序性的特色，但「術」比起「法」而言，更具「機械性」。例如上述的「**置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀**」共包含了兩個主要的子程式，無論數據多少，只要明確而機械地執行上述「置粟數」再「以斛價銀乘之」這個演算法，便可計算得所求。又或者《綴術算經》第四問的解術：「**倍底面，加三，底面乘之，加一，又底面乘之，六而一，得積也。**」只需依問題所給的「底面數」機械性執行「倍底面」→「加三」→「底面乘之」→「加一」

→「又底面乘之」→「六而一」共六個的運算程式，便能計算出所求之積。

然而，「法」本身往往帶有「不明確性」，例如以開方法開平方或以開方翻法求方程式根的近似值的過程中，必需依據題目的數據，以及每開得一位後所得新數據，重新判斷並決定如何開下一位。因此，雖然執行法則的過程，也具有一定的程序性，卻往往無法很明確地、機械性進行操作，而帶有若干人為的「判斷」與「決策」。

最後，再就通用性來比較兩者，「術」一般是用以處理單一問題的特定演算法，作為某特定問題的答案，必須附屬於該問題之下，或可視為該問題的公式解。「術」也明確地描述了特定問題條件中各變量間的關係(例如描述勾股定理的術)，一般而言，當我們將問題本身抽離時，「術」便失去它的意義，而描述勾股定理的術，也只限於勾股定理相關場合。然而，「法」是一種較為通用性的基礎知識，包含前面提到的因乘法、歸除法、約分之法、立元之法乃至開方翻法等各類法則，並不直接與單一問題相關，也不從屬於特定問題，適用場合較「術」為廣，被用於不同問題的求解過程，或被置於不同的「術文」的脈絡中，無論和算家解題、造術或求數的過程，往往離不開這些常用的法則。

綜合來看，各類「法則」所涉及的這些數學操作或數學運算，可謂和算家的基礎知識，作為演算法的其中一環，這些「法」亦可視為執行演算法流程的子程序，被置放在「術」的局部程序中。

肆、「表」的意義與特色

一、表的特色、功能與本質

除了「術」與「法」之外，十八世紀中期之後，「表」慢慢成為和算家研究與關切的重要數學物件。儘管他們所提出的數學問題，仍是以數值解以及求得問題的演算法－術－為主，並不以「表」作為答案，但這些「表」，儼然成為另一種新型態的數學知識與認知工具。從外在的表徵來看，「表」通常是一種格子狀的矩形陣列，利用二維的矩形陣列記錄數值或數學符號，並依據不同行列位置賦予格子中的數學物件不同意義。有些「表」的功用，類似於紀錄數值的矩陣，可作為紀錄數學知識之用，然而更多時候，「表」的內容羅列了數值之間的關係或幾何量之間的關係，特別是同一行或同一列之中的數值與符號，通常具有某種特殊關係（例如：某些開展式的各項係數或某些變量之間的關係與函數關係等）。

無論是藤田貞資(1781)《精要算法》中，[6]記錄了特殊三角形的三邊長，或者安島直圓(2009a)所造指數表，又或者《圓理算經》中的「圓弧積線表」，列出許多幾何量的無窮級數展開式。這

[6] 《精要算法》是 18 世紀中期的重要和算著作，藤田貞資（Fujita Sadasuke, 1734~1807）出版本書，作為和算教科書之用，促進了和算的普及化。

些「表」都承載了記錄數學知識的功能，並且連結了不同概念或幾何物件，揭示了它們之間的關係。然而，「表」除了是和算家用來記錄數學概念、數學關係與數學性質的工具外，也是表徵數學知識的新方式。例如，《圓理算經》中的「應率八態表」與「應率八象表」等，[7]將原屬於文字演算法形式的開方綴術（二項式展開式），以表的方式呈現，一般化且濃縮地記錄了這些展開式的係數與關係結構。

我們以小出兼政《圓理算經》書中的陽除表為例（如表 3），[8]該「表」與$(1-x)^{-n}$的展開式有關，羅列了$(1-x)^{-1}$、…、$(1-x)^{-7}$的展開式係數，並利用表中的不同行列位置，來代表不同項的係數。其中，表的每一行各代表了不同冪次的$(1-x)^{-n}$展開式，而各列則為展開式中不同冪次項的係數。例如，「一形」該行相當於$(1-x)^{-1}$的展開式：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\ldots$$

而「四形」所屬的那一行，則相當於$(1-x)^{-4}$的展開式：

$$\frac{1}{(1-x)^4}=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+120x^7+\ldots$$

表 3

《圓理算經》之陽除表

陽除表	一形 $1/(1\text{-}x)$	二形 $1/(1\text{-}x)^2$	三形 $1/(1\text{-}x)^3$	四形 $1/(1\text{-}x)^4$	五形 $1/(1\text{-}x)^5$	六形 $1/(1\text{-}x)^6$	七形 $1/(1\text{-}x)^7$
原數	1	1	1	1	1	1	1
一差	1	2	3	4	5	6	7
二差	1	3	6	10	15	21	28
三差	1	4	10	20	35	56	84
四差	1	5	15	35	70	126	210
五差	1	6	21	56	126	252	462
六差	1	7	28	84	210	462	924
七差	1	8	36	120	330	792	1716

註：參考圓理算經重製，並以現代符號表示。

[7] 「應率八態表」與「應率八象表」分別包含八個表，且各自記錄八類二項展開式的各項係數。八態表中記錄的是含$(1\pm x)^k$項的展開式係數，而八象表則記錄了含$(\sqrt{1\pm x})^k$項的展開式係數，其中k為整數。

[8] 原表為直式，由右往左書寫，這裡筆者改成橫式由左而右，並以現代的符號表示該表中的籌式。表中的率即x，和算家並未討論這些無窮級數收斂的條件。

觀察此表中數字部份的內容，它記錄了多個 $(1-x)^{-n}$ 展開式的係數，以及不同展開式係數之間的關係。表中第 n 行第 $k-1$ 列所列出的數字，恰為 $(1-x)^{-n}$ 展開式中 x^k 項的係數，亦即呈現出數對 (n,k) 與對應係數之間的數值關係。傳統上，和算家若要表示出表 3 所給的 $(1-x)^{-1}$ 、$(1-x)^{-2}$ 、…、$(1-x)^{-7}$ 展開式時，總共需要七個不同的文字術文，然而，以圖 2 為例，透過表的使用濃縮、簡化了原本冗長的文字術文，表中各行表示不同的 n 所對應到的 $(1-x)^{-n}$ 展開式係數，再以每行的不同「位置」來表示不同的「項」，並於表中紀錄下各項係數。

因此，和算家的「表」不單只是作為記錄數值與結果之用，有些「表」的內容包含了數學性質、或者隱含了某種數學公式，同時，整張表也可以看成一種結構性的數學物件，表中的元素也會隨其所在位置或者所在行列的不同，而具有不同意義。「表」中所含元素－諸如數值或符號或關係式等－亦為概念性的數學物件，而「表」便整合連結了這些物件，形成了結構性的關係。

另外，此表中的數字也隱含了許多特殊的規律，若以左上角為頂點，此表亦相當於巴斯卡三角形，因此，當和算家造出這些表的前幾行之後，透過表中數值呈現出的規律與關係，便可將此表繼續擴張與推廣，相當於可將 $(1-x)^{-n}$ 的展開式作進一步的推廣。換言之，列表的方式，有助於發現其中的規律，從這些規律，也易於再將表擴展或推廣至更一般化的情況。

和算家的研究一般著重於問題的求解與「術」（演算法或公式）的探求，然而十九世紀和算家們大量創制諸類數學表，則突顯出他們開始重視數值之間的關係或者幾何量之間的關係，不再只局限於傳統數學文本中以問題和「術」作為主要核心，[9]而是從設題與施術等數學知識活動，擴展到對數值關係與幾何關係的追求。

另一方面，小出兼政（2008）在《圓理算經》自序中提到：「**凡圓理之法，用表得解術者，皆始自和田子，無制表之術，稱不得捷徑之解術。**」可見「表」成為當時和算家探求問題答案的重要認知工具，他們將許多公式、性質、數值關係、代數關係式以及幾何關係式等，濃縮記錄於諸「表」中，作為既知的數學知識與工具，待適用場合時，引以為用，簡化了探求演算法或幾何關係式的過程。

例如圖 2 是十九世紀和算家和田寧所發明的積分法之典型流程，在求各類幾何問題的過程裡，「表」扮演了相當重要的角色。過程中，他首先將欲求長度、面積或體積的圖形作適當的分割，分割後需使用相應的（矩線）表，進而表示出所需的線段微元 L_i（或面積微元 A_i 、體積微元 V_i ），而後再對這些微元求和。此求和的過程中，同樣需要檢（八象或八態）表，將這些微元中帶根式的部份作展開，接著，將所有（無限多個）幾何微元的展開式作加總，再檢（疊）表求得無窮級數和，最後，便可整理得所求的術－演算法或幾何公式、關係式。

[9] 和算傳承自傳統中算，江戶早期的數學文本中，主要記載了各類數學問題以及問題的解法、術和數值解。而江戶數學家用以發表數學研究成果的「算額」上，也是如此。但十九世紀的和算文本中，則包含了與「單一數學問題」無關的「表」、數學關係式幾何關係式等，甚至以「表」的類型對數學問題作分類。

圖形分割
↓ 檢矩線表
某幾何微元（L_i、A_i、V_i）
↓ 檢八象表或八態表
得某幾何微元展開式
↓ 檢諸疊表
求得無窮級數和
↓
得術－演算法或幾何公式、關係式

圖 2　和田寧積分法的典型流程圖

綜合來看，「表」作為一種新型態的認知工具，透過「表」的使用有助於和算家獲取新知、求解問題或核證演算法。最後，總結「表」的主要功用，包含：1.記錄知識，2.以二維的方式紀錄數值、變量或符號之間的關係，3.紀錄數學公式或性質，4.演算法的濃縮，5.作為重要認知工具，用於問題的求解與求術的過程中，6.讓初學者觀察數學公式中元的變化。

二、表與術的比較

說明了「表」的特色與功能後，接下來，我們進一步與「術」作比較，以瞭解「術」與「表」在和算文化裡扮演的角色。

「術」通常以文字敘述的方式呈現，列出依序執行的操作或數學運算，以及被操作的數或量。「表」通常是格子狀的矩形陣列，格子中所包含的主要數學物件為數字與籌式符號，有時也包含了文字說明。「術」通常可視為一種程序性且機械性的演算法，通常具有概括性與抽象性，有些時候可看成一個數學公式。一旦給定了問題條件中的相關數據後，透過術文中的演算法，可逐步進行操作與運算，機械而程序地獲得所求的值。至於「表」，通常以二維矩形陣列的方式，記載或列出許多數值與符號。有些「表」，單純作為紀錄數與式之用；另有些「表」，進一步記錄了數或幾何量之間的關係；亦有些「表」，隱含了數學性質、數學公式，亦或記載展開式之各項係數。

一般而言，「術」與「表」的內容，皆隱含了數值或幾何量之間的關係。但兩者之呈現方式則大不相同。「術」的內容所呈現的，是一種動態轉化的關係，連結了條件與所求量。依據問題給定條件中的數據或抽象的幾何量，透過術文中的演算法，機械而程序地逐步作變換，最終得到所求數據或幾何量，因此，「術」可視為從給定條件至所求量之間的轉化關係。同時，「術」所呈現的關係通常是「動態」的、「程序性」的。例如，「術」文中常出現「置」、「列」、「寄位」、

「寄左」等與動作有關的詞，或者「加」、「減」、「乘」、「除」、「自之」、「開方」等與實際計算或執行計算法則相關的動詞，再再反應出「術」所呈現出的動態操作特色。

另一方面，「表」所呈現出數值、符號與幾何量之間的關係是「靜態」的，並具有某種「結構性」。例如藤田貞資（1781）在《精要算法》〈中卷〉所造的兩個數值表，除了記錄滿足特定條件的三角形邊長，也可看成滿足特定條件的三角形，其三邊長之間的數值關係。又或者安島直圓（2009a）於《不朽算法》〈下卷〉所列表的內容，相當於表現出 $y=10^{n\cdot 10^{-k}}$ 一式中，y 與 n、k 等變量之間的關係。另外，松永良弼（2009a）《方圓雜算》書中列出許多表，[10]則以抽象化的數學式，表示出一系列與圓相關的圖形中，所蘊含的相似直角三角形勾、股、弦長之間的關係。

小出兼政（2008）《圓理算經》〈下卷〉的「圓弧積線表」，羅列了圓積、圓周長、弧積、弧背、矢、弦有關的冪級數展開式，此表的內容，可視為將文本中與圓積、圓周長、弧積、弧背、矢、弦等問題有關的「術」，轉換成數學式，即透過和算家的符號系統，將原本程序性、文字描述的「術」表示成結構性的數學物件（數學式），例如：

$$A=D^2(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\cdots)$$

可看成圓積 A 與直徑 D 之間的關係。表中也列出了弧長 s 與弦 d 和矢 c 之間的關係式：

$$s=2c(\frac{1}{2}+\frac{T}{3}-\frac{T^2}{15}+\frac{T^3}{35}-\frac{T^4}{63}+\frac{T^5}{99}-...)\text{，}T=\frac{4c^2}{d^2}$$

這些「表」的內容主要與幾何量之間的關係有關。另也有些「表」的內容與代數關係有關。例如《圓理算經》下卷所列「開方溟式出商表」的內容（如圖 3 所示），便是將「無窮」多項方程式的根，表示成各項係數的組合，藉此表可表示出「無窮多項方程式」的根，而該表的內容事實上也可看出「無窮多項方程式」的根與該方程式係數之間的關係。

[10] 松永良弼(Matsunaga Yoshisuke, ?-1744）是 18 世紀中期，關流重要集大成者，他繼承了建部賢弘在圓理方面的重要研究成果，他的《方圓雜算》一書，主要探討了圓中弧、矢、弦等公式，也討論了圓周近似值相關研究成果。

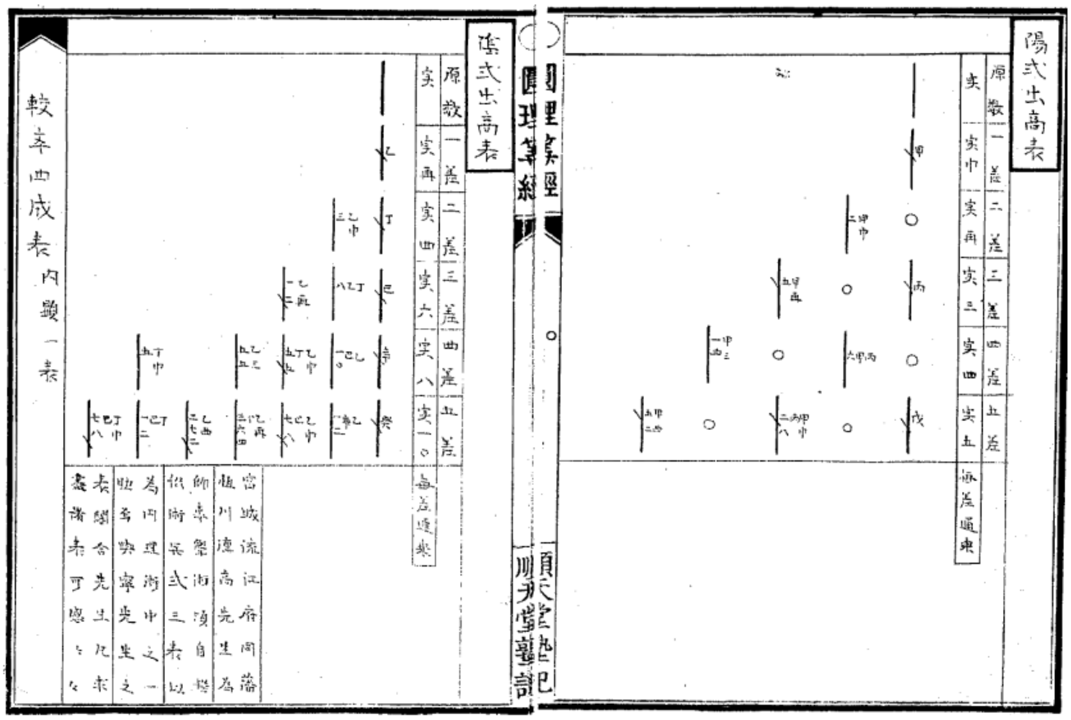

圖 3 《圓理算經》陽式出商表與陰式出商表之書影

例如已知「原溟元式」：[11]

$$0=-r+x+\text{甲}x^2+\text{乙}x^3+\text{丙}x^4+\text{丁}x^5+\text{戊}x^6+\text{己}x^7+\text{庚}x^8+\dots$$

利用「元式出商表」可將上述「原溟元式」中的 x 表示成 r 的展開式：[12]

$$x=-r+(-\text{甲})r^2+(-\text{乙}+\text{甲}^2)r^3+(-\text{丙}+5\text{甲乙}-5\text{甲}^3)r^4+(-\text{丁}+6\text{甲丙}-21\text{甲}^3\text{乙}+14\text{甲}^3+3\text{乙}^2)r^5+\cdots$$

又例如已知「原溟陽式」：

$$0=-r+x+\text{甲}x^2+\text{丙}x^4+\text{戊}x^6+\text{庚}x^8+\dots$$

利用「陽式出商表」可將上述「原溟陽式」中的 x 表示成：[13]

$$x=-r+(-\text{甲})r^2+(\text{甲}^2)r^3+(-\text{丙}-5\text{甲}^3)r^4+(6\text{甲丙}+14\text{甲}^3)r^5+\cdots$$

另外，小出兼政（2008）在《圓理算經》書中，也整理並列出許多與無窮級數和有關的表，這些表主要可分成「疊率四成表」與「疊率見飛表」兩類，若以現代數學的角度來看，相當於建

---

[11] 在書中，小出兼政將「無窮多項方程式」分成原溟元式、原溟陽式與原溟陰式三類，若以現代符號表示，原溟元式指的是 $0=-r+x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$，而原溟陽式表示 $0=-r+x+a_2x^2+a_4x^4\dots+a_{2n}x^{2n}+\dots$，原溟陰式則表示 $0=-r+x+a_3x^3+a_5x^5\dots+a_{2n+1}x^{2n+1}+\dots$。其中，這三類方程式的常數項皆為負，一次項係數為 1。又「陽式」是「元式」其三次項以上的奇數次項係數為 0 時的特例，而「陰式」則是當偶數次項係數為 0 時的特例。

[12] 元式出商表中所記載的，是如何利用元式的係數表示此「方程式」的解，且此解表示成展開式的形式。

[13] 陽式出商表中所記載的，是如何利用陽式的係數表示此「方程式」的解，且此解表示成展開式的形式。

立了許多積分數值表。其中「疊率四成表」的內容，相當於列出當 s 與 t 為整數時，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^{s}(\frac{1}{n})^{t}$ 的數值表。表中的不同行與不同列，分別記錄了不同的 (s,t) 所對應之值。此表的內容亦可看成 $f(s,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^{s}(\frac{1}{n})^{t}$ 的函數關係。

以表的某一行為例，該行的各列分別記錄下列無窮級數之值（亦可看成積分表）：$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n})=1$ 、 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n})(\frac{k}{n})=\frac{1}{2}$ 、 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n})(\frac{k}{n})^{2}=\frac{1}{3}$ 、 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n})(\frac{k}{n})^{3}=\frac{1}{4}$ 、...... 、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n})(\frac{k}{n})^{4}=\frac{1}{5}$、……類似地，「疊率見飛表」的內容，則記錄了當 s 為整數且 t 為正整數時，無窮級數 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n})^{\frac{s}{2}}(\frac{k}{n})^{t}\frac{1}{n}$ 以及 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[1-(\frac{k}{n})^{2}]^{\frac{s}{2}}(\frac{k}{n})^{t}\frac{1}{n}$ 的數值，亦分別可看成 $f(s,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n})^{\frac{s}{2}}(\frac{k}{n})^{t}\frac{1}{n}$ 與 $f(s,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[1-(\frac{k}{n})^{2}]^{\frac{s}{2}}(\frac{k}{n})^{t}\frac{1}{n}$ 的函數關係。這些表的創製，方便當時的數學家在求解求長度、面積與體積等積分相關問題時，直接檢索求得積分值。

除了上述「表」與「術」兩者本質上的差異之外，以下我們繼續討論它們所適用的場合。「術」常可視為一般化的公式與關係，例如各類面積公式、體積公式或勾股定理等，然多數場合裡，「術」作為特定問題的演算法，即和算家針對特定數學問題時，所求得的相應的公式解，當任意改變問題中的數據時，執行同樣的演算法仍可求得答案。而特定的「術」通常只能用於其所相應的特定問題，不適用於其它的問題。換言之，絕大多數的「術」，都只是適用於特定問題的機械性演算法，適用性通常較為特定且狹隘。

然而，「表」適用的場合則較廣，例如十九世紀和田寧所造的各類數值表與關係表，廣泛地被用於求各類「術」的過程中。許多「表」可視為既知的數學知識或性質，可被用於滿足該表前提條件的所有狀況。例如，檢表可得二項展開式（主要包含 $(1-x)^{\frac{1}{n}}$ 、 $(1-x)^{\pm\frac{n}{2}}$ 之類的展開式）的係數，可適用於需要二項展開式的一般性場合。又例如前述圖 2 中的「陽除表」，適用於任何與 $(1-x)^{-n}$ 相關的場合，當 x 小於 1 時，皆可使用此表將 $(1-x)^{-n}$ 展開。另外，「表」通常也比「術」來得容易推廣與擴張，例如與二項展開式有關的諸表，易從表中看出不同行或不同列數字之間的關係與規律，一旦瞭解並掌握了表中各行各列數值之間的關係與規律之後，藉由這些關係與規律，可將這些「表」推擴至任意的大小，並達到對原數學關係式的推廣，「術」則無此特性。

最後，筆者綜合前述論述以及相關比較結果，將「表」與「術」的特色作一簡單對比，置於表 4 中：

表 4

「表」與「術」的相關比較

	術	表
表徵	文字敘述	二維矩形陣列羅列數值與符號
細節	不同程序代表不同操作與運算	不同位置代表不同意義
本質	演算法	記錄知識與數量關係
數學內涵	亦隱含公式、關係式與定理	隱含公式、關係式與定理
特性	動態的數學操作 程度性、機械性	靜態的數學物件 概念性、結構性
使用	依程序執行操作或運算	檢表得數、得術或得關係式
數學實作	在紙上或計算用的表面上，對給定的數或量作操作與運算	查檢紙上所列表中的數或式，輸出所得用於解題或造術過程
通用性	特定問題的答案 求解特定類問題的演算法	求解各類問題的工具 適用於滿足條件的所有情況
擴展性	難以將舊「術」推廣成新「術」	易於依規律將表擴展、推廣
關係性	轉化的關係 （連結給定條件與所求數或量）	幾何或數值的結構性關係

資料來源：研究者整理繪製。

三、術與表之過渡－三種表徵

雖然「術」與「表」在形式上與許多特色上迥然不同，但「術」與「表」所涉及的數學知識並非兩互斥的集合，有些「數學知識」既可以「術」的方式來表達亦可利用「表」的方式呈現。從文本的考察中可以發現，歷代和算家處理 $(1-x)^{k/2}$ 類展開式時，共包含了三種不同的表徵方式。例如，十八世紀中期，《算法綴術草》一書中，討論開方問題時，所提出的「開平方術」（松永良弼，2009b，p. 345）：

> 計大方，自之，以減云積，名曰餘積。以大方為元數，元數以餘積相乘，以大方冪除之，又二除，為一差；一差乘餘積一段，以大方冪四段除之，為二差；二差乘餘積三段，以大方冪六段除之，為三差；三差乘餘積五段，以大方冪八段除之，為四差；四差乘餘積七段，以大方冪十段除之，為五差。……遞推之得逐差，置元數、陽差加之、陰差減之、得方面。

他以文字敘述的方式，表示出此程序性的術，而此術相當於表示出 $(a^2 \pm b)^{1/2}$ 的展開式，一方面可視為一種機械性、程序性的演算法，同時，亦可不斷地遞推，形成隱含了無窮多個步驟的「無窮展開式」。然而，將展開式表示成文字術文的形式顯得相當冗長，並且不易發現不同步驟之間

的關係與係數的規律，同時，不同展開式係數之間的關係與規律也不易查覺，因此，此類表徵方式，難以促進數學概念的認知與推廣。

到了十八世紀末期，安島直圓《綴術括法》一書裡，將 $(1\pm x)^{1/2}$ 的展開式推廣至 $(1\pm x)^{1/n}$ ，n 為任意正整數時的情況，他的表示法是結合了以文字敘述的程序性術文，以及格子狀的表來表徵此展開式。他先以程序性的「術」說明整個演算法的主要流程（安島直圓，2009b，p. 426）：

> 計泛商數，名原數，如開方冪數，自乘之，名定除法，定除法與原積相減，餘名定乘法。置原數，乘定乘法，以定除法除之，得數，一差除率除之，為一差。置一差，乘定乘法，以定除法除之，得數乘二差乘率，以其除率除之，為二差，……，為五差，餘仿之。

接著，再以「表」的方式列出展開式當中，各乘方（各項）所對應的係數（即表中的乘率與除率）。亦即與動態性操作過程有關的部份，主要以文字術文的方式來描述，而演算法過程中，欲求各差所需用到的「乘率」與「除率」等數字，則以表列的方式呈現（如表 5 所示），此表參考安島直圓《綴術括法》之「諸差乘率除率表」而作，原表列至七乘方，這裡受篇幅之限，僅列至四乘方。

表 5

安島直圓《綴術括法》的諸差乘率除率表。

	一乘方		二乘方		三乘方		四乘方	
號	乘率	除率	乘率	除率	乘率	除率	乘率	除率
一差		2		3		4		5
二差	1	4	2	6	3	8	4	10
三差	3	6	5	9	7	12	9	15
四差	5	8	8	12	11	16	14	20
五差	7	10	11	15	15	20	19	25
六差	9	12	14	18	19	24	24	30
七差	11	14	17	21	23	28	29	35

註：參考綴術括法重製。

值得注意的是，上述的「術」本身為一般性的演算法，適用於任意不同乘方的情況。換言之，只需一個「術」搭配此表，便可表示出 $n=1,2,\ldots,k$ 時的展開式，不需要大費周章列出 k 個冗長的文字術文。因此，此表的內容相當於羅列了 $(1\pm x)^{1/n}$ 展開式中的各項係數。例如第一列「一乘方」的內容搭配術文，相當於給出了下列展開式：

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^4-\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^5-\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{48}x^3-\frac{15}{384}x^4-\frac{105}{3840}x^5-\ldots$$

再者，從此表易看出展開式的前後項關係，例如一乘方（即$(1\pm x)^{1/2}$）所列展開式各項系數的除率（分母），分別為 2、4、6、8、…即偶數數列，而乘率（分子）為 1、3、5、7、…則是為以 1 為首項，公差為 2 的數列。再看各乘方的一差除率為 2、3、4、5、…；二差乘率為 1、2、3、4、5、…；二差除率則為 4、6、8、10、…。從這些係數不難看出各乘方與各差乘率與除率之間的關係，因此，和算家可利用這些關係將表擴張，求得當 n 為其它正整數時的$(1\pm x)^{1/n}$ 展開式。

到了小出兼政的《圓理算經》，他更進一步將許多展開式完全濃縮於同一表中，且書中的表不再搭配文字術文說明。例如「陽商乘表」中的「一形」行，相當於給出了下列展開式：

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{48}x^3-\frac{15}{384}x-\frac{105}{3840}x-\ldots$$

而其它各行則分別為$(1-x)^{3/2}$、$(1-x)^{5/2}$、…、$(1-x)^{13/2}$的展開式。換言之，針對同一個（類）數學知識而言，發展過程中存在了三種不同的表徵方式，松永良弼表徵成純術文的方式，而安島直圓則是術文輔以表的方式，但到了小出兼政則完全以表的方式來呈現。其中，「術」的標記法主要是以文字，展現出程序性、機械性、動態的演算法。而「表」則呈現出前後項係數的結構與關係，或者呈現出已知幾何量與所求幾何量之間的關係，是一種靜態的數學物件，同時也更著重於此關係式本身。換句話說，這些和算數學知識的演化，包含了從「術」過渡到「表」的三種表徵，從動態與程序過渡到靜態、結構性的數學物件。三種表徵的演化除了佐證表在和算的重要性與日俱增，並且展現出數學概念發展過程的「程序－物件」二元性特色。

伍、數學教育與數學史連結的新進路與反思

一、認知理論與數學概念發展

過去許多數學史研究，著重在分析、理解數學家的數學研究成果，例如數學家所提出的問題本身、解讀術文的內容與正確性、「術」與問題的連結、「表」的內容與其表示的數學公式或數學性質等。又過往 HPM 相關研究主要是數學史在數學教育的應用，透過歷史故事或者數學概念發展史上的實例，引入數學教學設計與數學教材中，增進學習者的情意或服膺數學概念的理解為目的，數學史作為數學教學的輔具，或者作為概念學習的媒介。

本研究則嘗試另一個方向的進路，將數學教育的理論與觀點，應用到數學史的研究。因此，筆者在文本分析與概念發展的分析過程中，除了貼近一手文本、貼近當時的歷史脈絡，詳實地

進行解讀外，也從 Sfard（1991）的認知觀點切入，重新審視和算數學概念、數學物件 — 術、法、表 — 發展的脈絡與意義，特別是它們的結構性面向 － 作為靜態的數學「物件」（object）－ 與操作性面向 － 作為動態的數學「程序」。

過去，數學史家們著重於解讀和算文本中的問題，以及術、法與表之「數學意義」，並利用現代數學符號表示這些數學物件所蘊含的數學公式、數學方法與數學性質。然而，在引入 Sfard（1991）的理論後，得以從不同角度探討這些數學物件之發展脈絡，更清楚地描繪和算知識與和算數學物件演化過程中所隱含的認知意義及其概念上的轉變。如同本研究所發現，和算文本中二項展開式的發展、演化過程，呈現出從「術」過渡到「表」的三種表徵，展現出數學概念發展過程的「程序－物件」二元性特色。[14]這些二項展開式的發展，從十八世紀中期，松永良弼《算法綴術草》書中完全以文字呈現，具程序操作面向的「術」，到十八世紀末期，安島直圓《綴術括法》書中半程序與半結構的「術＋表」，再到小出兼政的《圓理算經》中結構物件面向的「表」。這呼應了 Sfard（1991）的觀點，也說明為何大量的數學「表」會是和算發展晚期的產物，並成為江戶晚期和算家們的重要研究成品，不再只局限於問題與「術」的研究。

另一方面，過去數學史研究中，「術」與「表」是獨立的數學物件，除了外在表徵形式的差異之外，它們表示的亦是不同的數學概念或數學公式。更未有學者將它們放在一起討論與分析。然而，引入此數學教育的認知觀點後，研究者也得以理解和算文本中某些「術」與「表」之間的連結，以及兩者在概念發展過程的脈絡關係，更加豐富了解讀和算文本時的歷史想像。

二、計算工具與數學概念發展

和算家的計算工具主要包含傳自中國的籌算與珠算，本文所提到的「法」與籌算、珠算的使用有關。例如演算法中提及使用乘除法之場合，可利用珠算求值，至於開方法的使用則須借助於籌算或筆算系統。數學家不須再於術文中詳細說明數學法則的操作與計算程序，只需利用文字記錄「法」的名稱，當欲透過「術」中的演算法計算求得數值解時，則依據「術」所示之法則，在計算的表面，如算盤、珠算盤或紙上操作計算或演算的過程即可。其中，珠算多用於數值的計算，但對於須設立未知數、列方程式的數學問題而言，則必須使用籌算。然而，和算有許多問題須設列多個未知數，傳統籌算並無法處理，後來隨著和算家發展出筆算代數符號系統－傍書法與點竄術，得以解決。

上述筆算符號系統的發展與成熟，亦展現出從操作性的程序面向過渡到結構性的物件面向的特色，並且對於和算的「術」至「表」的發展有著關鍵性的影響。一方面，筆算符號系統解放

[14] 又例如黃俊瑋（2015）的研究指出，和算分式符號與概念，同樣具有二元性特色，其發展過程亦是操作性的程序面向先於結構性的物件面向，從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至數學物件「分式」。

了籌算所能表示的未知數個數，同時它具有記錄知識的功能，幫助和算家將程序性、動態的術文，物化成靜態的、可進行操作的數學式，濃縮了冗長的術文程序，也使數學家發展出結構性的數學表徵「表」，透過符號與表的使用，大幅減化了文字術文中所包含的計算程序數量，也讓數學家們更容易將各類的「術」－公式或性質－進行一般化，並以「表」的方式進行統整與記錄，甚至進行推廣。亦即從傳統的籌算系統，發展出筆算代數符號系統，再加上筆算工具的使用，使得和算得以從中算的「問題－答－術」，慢慢發展成「問題、術、法、表」的知識架構。亦即，數學實作工具的發展與改良（籌算到筆算符號），影響了數學知識的發展與呈現的面貌。[15]

三、在地化的和算數學文化

江戶時期和算發展的過程中形成了許多流派，當時數學教育的推動與數學流派有關。數學知識的傳承主要採師徒制的方式，由各和算流派的掌門人－家元－對弟子和門人傳授數學知識。這種制度於日本江戶初期成形，並被各種藝道（例如花道、茶道與棋道等）普遍採納。習算者依據各流派所制定的規範與制度，循序漸進地學習數學知識，並依據所學與所達到的數學程度，獲授不同等級的「免許狀」，證明其所屬的門派與所達到的數學能力。如此，在各流派裡的數學學習具制度性的規範，且數學本身成為一種具專業性的學門與知識。在當時，獲頒高級免許狀的和算家，也代表成為了精熟數學的專業人才，因而有機會受聘任職數學教師等工作，或者受任會計、工程、天文、曆法或製定全國地圖等與數學相關的工作。

另一方面，和算知識與文化的保存、整理與流傳，並非經官方機構或依官學的方式來發展與推廣，主要是由武士與遮民階層發起，由下而上的文化。和算的學習內容以及知識的決定權，並非在官方，學習制度的建立，亦非官方，主要都是各流派內的掌門人以及重要數學家所決定。展現當時數學家專業自主的特色，也反應和算流派對於江戶時期數學發展的重要意義與推動力量。

除了數學流派林立的特色之外，更發展出「遺題繼承」與「算額奉納」等在地化的數學知識活動。「遺題繼承」指的是當時數學家著書解答前人所遺留的問題之餘，會再於書末繼續提出新問題徵解，如此引發許多後繼數學家投入數學研究與新問題的設計，推動數學的發展。而「算額奉納」則是當時的數學家會將自己發明、設計的數學問題、答案與相關圖形畫在匾額上，並奉納發表於神社佛閣。除了展現自己與所屬流派的研究成果外，也可進行數學交流與流派之間的數學競技。

[15] 這樣的歷史發展與反思，恰可連結到 108 數學課綱，強調藉由計算機等工具的引入與使用，來幫助學生認識、理解無理數、對數、三角比等概念。這樣的轉變，除了改變數學教學樣貌，是否本質上地影響學習者對於這些數學概念的理解方式與概念心像，將待進一步的研究。

無論是遺題繼承、算額奉納或是數學競技，都涉及了數學問題的設計與求解：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」。再者，依據「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具在紙或計算表面上，逐步操作、計算，求得相應的數值解。因此，本研究中，對於「術」、「法」、「表」等和算數學物件的深入研究與釐清，皆有助於理解和算家進行數學研究與實作兩種知識活動面向，也助於理解和算在地化的數學文化特色。

陸、結論

「法」、「術」與「表」三類數學知識與數學物件，在和算社群的數學知識活動中，占據了核心地位，這些是他們從事數學研究時，所追求且關切的重要知識類型。本研究中，透過和算文本的分析，闡述這三者的意義、特性與功能，也進一步比較三者間的差異與關連，這樣的比較，有助於我們釐清這三者的意義與特色，從而理解當代和算家如何從事數學知識活動，與如何進行數學實作。

其中，「術」為程序性且機械性的演算法，有時隱含了某些數學公式或定理，並可視為將問題數據逐步作運算、操作、轉化，最終獲得問題答案的作業流程。它既是和算家尋求的答案類型，也是求得數值解的重要媒介，並且揭示了數與量之間的抽象關係。「法」是程序性的數學運算或數學方法，藉以計算求得數值，或常被鑲嵌於術文中，作為執行演算法的子程式或作業流程中的子程序。「表」則記錄、濃縮了數學知識，呈現出數學概念與數學物件之間的靜態關係與結構，並作為重要認知工具，被用於求解問題，以及探索、核證知識的過程中。

就和算的脈絡來看，「術」和「法」係為不同的數學物件，且具有不同的意義。「術」是抽象性的演算法（公式解），而「法」是求得數值的計算程序，和算家會以「術」作為問題的答案或求解的對象，而「法」的目的與功能，則是服膺於計算求出數值，或作為術的子步驟，作為求解問題過程中所依賴的「方法」或「工具」，而非解題的最終目標亦非問題的答案。[16]它們雖然都具有程序性的特色，但「關係性」、「機械性」以及「通用性」是主要差別。研究也發現，數學知識的演化過程，包含了從「術」過渡到「表」的三種表徵－從動態與程序過渡到靜態、結構性的數學物件。除了佐證「表」在和算發展過程日益重要外，也展現出數學概念的二元性特色。

和算文本中的「術」，一般專屬於特定的問題脈絡中，而「法」與「表」則為解決問題的數學工具，作為已知的數學事實，被廣泛地應用於各種求數與造術的場合。而「術」的執行程序裡，則透過「依…法」或「檢…表」等方式將「法」與「表」引出。最後，筆者在圖 4 中整理出問題、數與術（答案）以及法與表等數學物件之間的脈絡與關係。綜合來看，和算家提出數學

[16] 例如前面提到的「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也」與「置元粟數為實，以人數為法，除之，得每人分粟。」這是對應於兩個數學問題的「術」，而實際執行演算法（術）求得數值解的過程中，則分別使用了「乘」與「除」兩個「計算程序」。

「問題」後，存在研究與實作兩種知識活動面向：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」(如圖 4 中的實線箭頭所示)。再者，據已知數 (量)，依「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具在紙或計算表面上，機械化地逐步操作、計算，可求得相應的「數」值解 (如圖 4 中的虛線箭頭所示)。

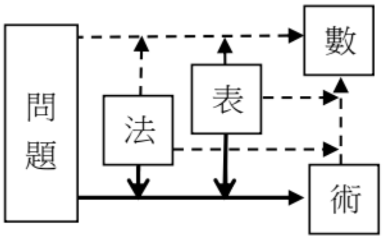

圖 4　問題、術、數、法與表之關係圖

換言之，和算家解題或研究的過程中，主要利用已知的數學性質搭配「法」與「表」，求得一般性的演算法或公式解－術－作為問題的答案。欲計算出數學問題的數值解時，則依據術文所指示的演算法逐步操作，透過「法」或「表」的使用，搭配計算工具計算求得數值解。求術的過程偏重於推論；求數的過程則著重於依程序操作與計算。而上述這些概念的釐清，也有助於我們理解數學知識發展過程的多樣化風貌與在地化的數學文化特色。

綜合來看，本研究引入知識論文化的觀點，透過歷史文本分析探討和算群體中「知識」、「實作」等概念的意義，以及他們所偏好的知識種類與答案類型。同時，也將數學教育的理論與觀點，應用到數學史的研究與文本分析的過程，解讀和算數學物件的特色、數學概念的發展與演化，理解「術」與「表」等不同數學表徵之間的連結、過渡與關係。對於數學教育與數學史研究與之連結，開啟更多元面向之論述與研究進路。因此，數學史研究與數學教育研究之間具有相輔相乘的作用：「數學史研究，因教學認知等觀點的結合，而展現多元的關懷與開闊的視野；數學教學活動，因歷史脈絡等元素的融入，而啟發豐富的想像與深刻的理解 (黃俊瑋，2017)」。

參考文獻

小出兼政 (2008)。圓理算經。載於徐澤林 (譯注)，**和算選粹** (504-650 頁)。北京：科學。(原著出版年：1842)【Koide Kanemasa (1842). Yenri Sankyo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui* (pp. 504–650). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1842) (in Chinese)】

安島直圓 (2009a)。不朽算法。載於徐澤林 (譯注)，**和算選粹補編** (399-423 頁)。北京：科學。(原著出版年：1799)【Ajima Naonobu (1799). Fukyu sampo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui bubian* (pp. 399-423). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1799) (in Chinese)】

安島直圓（2009b）。綴術括法。載於徐澤林（譯注），**和算選粹補編**（426-431 頁）。北京：科學。【Ajima Naonobu (2009). Tetsu-jutsu Kwatsuho. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui bubian* (pp. 426-431). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】

松永良弼（2009a）。**方圓雜算**。載於徐澤林（譯注），**和算選粹補編**（349-387 頁）。北京：科學。【Matsunaga Yoshisuke (2009). Ho-En Kusazan. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui bubian* (pp. 349–387). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】

松永良弼（2009b）。**算法綴術草**。載於徐澤林（譯注），**和算選粹補編**（343-348 頁）。北京：科學。【Matsunaga Yoshisuke (2009). Sampo Tetsu-jutsu kusa. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui bubian* (pp. 343-348). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】

林力娜（2010）。從古代中國的數學觀點探討知識論文化。載於祝平一（主編），**中國史新論：科技與中國社會分冊**（181-271 頁）。臺北：聯經。【Karine Chemla (2010). An approach to epistemological cultures from the vantage point of some mathematics of ancient China. In Chu, Ping-yi (Ed.), *New perspectives on Chinese history*: *Science, technology and Chinese society* (pp. 181-271). Taipei: Linking. (in Chinese)】

建部賢弘（2008）。**綴術算經**。載於徐澤林（譯注），**和算選粹**（264-284 頁）。北京：科學。（原著出版年：1722）【Takebe Katahiro(1722). Tetsu-jutsu Sankyo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui* (pp. 264-284). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1722) (in Chinese)】

黃俊瑋（2015）。和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義。**臺灣數學教育期刊**，**2**（1），41-68。doi: 10.6278/tjme.20150313.001【Huang, Jyun-Wei (2015). The Development, transition and conceptual meanings of the symbolic representations about fractions in the Seki school of wasan. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 41-68. doi: 10.6278/tjme.20150313.001(in Chinese)】

黃俊瑋（2017）。和算家如何核證數學知識與獲得問題的答案：一個 HPM 的觀點與反思。**科學史通訊**，**41**，17-36。【Huang, Jyunwei (2017). How wasan mathematicians justified mathematic knowledge and acquired the solution of problems: An HPM perspective and reflection. *The History of Science Newsletter*, *41*, 17-36. (in Chinese)】

藤田貞資（1781）。精要算法。京都，日本：天王寺屋市郎兵衛。【Fujita Sadasuke (1781). *Seiyo sampo*. Kyōto, Japan: Ten'nōjiyaichirobee. (in Japanese)】

關孝和（2008a）。**括要算法**。載於徐澤林（譯注），**和算選粹**（156-246 頁）。北京：科學。（原著出版年：1711）【Seki Takakazu (2008). Kwatsuyo Sankyo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui* (pp. 156-246). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1709) (in Chinese)】

關孝和（2008b）。**三部抄**。載於徐澤林（譯注），**和算選粹**（103-137 頁）。北京：科學。【Seki Takakazu (2008). Sambusho. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui* (pp. 103-137). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715