科學教育學刊
2005, 第十三卷第一期, 29-52

Chinese Journal of Science Education
2005, 13(1), 29-52

小數診斷教學研究

劉曼麗
屏東師院數理教育研究所

（投稿日期：民國 92 年 9 月 16 日，修訂日期：93 年 6 月 17 日，接受日期：93 年 8 月 1 日）

摘要：本研究旨在探討小數診斷教學的實施情形和學生在迷思概念的改變情形。根據診斷教學的理念，以診斷迷思概念、製造認知衝突和調整認知三步驟，融入於正規的小數教學中。高雄和屏東地區的國小四、五年級學生各一班，共四班 98 人參加教學實驗之研究。資料蒐集的方式包括筆試、教學原案轉錄、學生習作和訪談，而資料分析的方式包括質性和量性的分析。本研究結果顯示，診斷教學對學生能有效地改變學生的小數迷思概念，並對學生在小數的學習上也有立即提昇及保留的效果。在診斷教學過程中，四年級教師於課堂上進行了七類迷思概念的診斷教學，而五年級則進行三類。製造認知衝突的策略有五類，分別是二對一法、反向法、一對多法、引入參考值法和表徵法；而調整認知的方法有四類，分別是透過具體物的操作、直接連結純小數與分數的關係、透過等分概念和利用多單位記數系統。

關鍵詞：診斷教學、小數。

壹、研究動機

小數很重要，偏偏小數概念卻是十分抽象和複雜，學生在學習上常常遭遇困難。再根據一些數學教育評量報告和研究結果，也發現學生在小數學習的表現確實不理想，又極易產生許多的迷思概念（吳昭容, 1996; 陳文利, 2001; 劉曼麗, 1999, 2001, 2002; 簡茂發和劉湘川, 1993; Glasgow, Ragan, Fields, Reys & Wasman, 2000; Hiebert & Wearne, 1986; 1988; Irwin, 2001; Kouba, Brown, Carpenter, Lindquist, Silver & Swafford, 1988）。然而，對改變學生小數迷思概念的研究卻不多見。另一方面，九年一貫的數學課程，強調教師在教學中應探討學生容易犯錯的原因，並進行診斷（教育部, 2000）。Bell（1993）曾指出數學教師在教學時，如能針對學生出現的迷思概念，提供診斷教學策略，設計能引起認知衝突的活動，將有效地根除學生的迷思概念。到目前，國內外也有一些實證研究結果顯示診斷教學確實是破除學生迷思概念的有效方法（林福來, 郭汾派和林光賢, 1995; 何明昇, 1998; 李源順和林福來, 1998, 2000; 李源順, 2002; Bell, 1989; Booth, 1984; Hart, 1984; Onslow, 1986; Tirosh & Stavy, 1999），可是在以上研究當中，尚未有包括小數方面的。

有感於九年一貫課程的訴求和診斷教學對於破除學生迷思概念有不錯的成效，本研究希望在現行的小數課程中，融入診斷教學的理念，使教師能在課堂上對學生可能有的小數迷思概念即時進行診斷，並予以適當的教學策略，來幫助學生改變迷思概念，以期防患於未然。因此，本研究的主要目的是將診斷教學理念融入於正規的小數課程中，探討教師在數學課室的實施情形和學生在迷思概念的改變情形。

貳、文獻探討

一、小數知識的探討

小數的概念起源於測量和分數的部分全體關係，其記數系統又是從整數的十進位制擴充而來。在我國的教材中，小數的學習是在整數和分數之後，小數與整數和分數既有相同之點又有相異之處。一些研究曾將小數與整數、小數與分數的異同性做一比較（Hiebert, 1992; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989），參考這些比較結果和分析我國國小的小數教材後，研究者將小數與整數和分數的異同性主要略述於下。

若考慮位值，小數與整數都是從左而右遞減，每一位值都是緊鄰其右邊的 10 倍。整數位名是從個位開始，順序是從右到左（個位，十位，百位，…）但讀整數的順序卻從左到右（…，百位，十位，個位）且需要將位名讀出（正讀），如「547」讀爲五百四十七；相對地，小數位名是從十分位開始，順序是從左到右（十分位，百分位，…）而讀小數的順序也是從左到右（十分位，百分位，…）且不需將位名讀出（簡讀），如「0.547」讀爲零點五四七。

以上是小數與整數的異同，至於小數與分數，其中純小數與眞分數兩者都是表示 0 與 1 之間的一個值，當整體被分割成越多等分而每一分的數值就越小，在 0 與 1 之間有無限多個分數也有無限多個小數。在分數的符號表徵中，分母可顯示一個單位被等分成多少等分，分子顯示佔多少等分，整體被分成任何等分，都能用分數表示；但在小數的符號中，一個單位被等分成多少等分是隱含在位數中，佔多少等分是由小數點後的部份顯示，整體被分成 10 的冪次方等分，才能以小數表示。

小數與整數的不同處，正是干擾學生建構小數概念的原因，如果學生理解不夠，就極易產生整數法則的迷思概念（Resnick, et al., 1989），誤以爲小數點後數字越多其值越大（如 3.21 會比 3.8 大）、或將小數點後的數字讀成整數。同樣地，小數與分數的不同處，也是干擾學生建構小數概念的原因，如果學生理解不夠，就極易產生分數法則的迷思概念（Resnick, et al., 1989），誤以爲小數點後數字越多其值越小（如 3.45 會比 3.2 小）、或分數與小數關係是由表面形式互換而成（如 5.3 和$\frac{3}{5}$相等）。相對地，學生學習小數時所具備的整數和分數經驗，在某方面又會對學生產生助益，例如小數的位值關係是由整數的位值類推（如右邊的數字是左邊數字的$\frac{1}{10}$）、而小數的意義可借助分數的概念了解（如分數的十等分概念）。

至於促進學生小數概念的學習，Hiebert 和 Wearne（1988）提出小數學習的四個階段：連結、發展、精緻與熟練、抽象，就爲小數教學指出了一條途徑，其中「連結」階段是強調應透過學生已熟悉的表徵（如具體物、圖像、分數符號等），來幫助學生連結小數符號並賦予其意義；「發展」階段是強調能以操作表徵的過程和結果，發展小數符號的意義和運算規則；「精緻與熟練」階段是強調脫離表徵的操作，直接使用小數符號來解題；「抽象」階段是強調能將小數的符號和運算規則，當成另一個抽象符號系統中的表徵。前兩個階段皆聚焦

在語意的理解而後兩個階段則著重在語法的精熟。小數教學不能一味地求「快」，唯有透過每個階段的完全發展，才是眞正的小數概念學習。之後，Hiebert（1992）又將小數知識具體分成三種：(1) 記數系統知識：有關小數符號的知識。(2) 運算規則知識：根據規則操弄小數符號以進行運算的知識。(3) 數量表示知識：將小數表示數量的知識。Hiebert 非常強調「連結」，如果希望學生對小數概念是眞正內化與了解，那就必須加強「記數系統知識」、「運算規則知識」與「數量表示的知識」彼此的連結。教師在完整的教學程序可以讓學生建立正確的連結，但需事先規劃：(1) 有明確的活動去連結小數的符號和意義。(2) 能寫出小數的符號和理解語意。(3) 發展符號的語言和語法。這些文獻爲我們的小數教學提供了一個明確的方向。因此，本研究在進行教學時將會加強連結階段，隨時讓學生操作表徵，透過等分概念將小數與分數做連結，並強調多單位記數系統，以幫助學生學習小數。

二、小數迷思概念

從現行的教材分析中，與小數相關的內容皆分布在三至六年級。學生學習小數極易產生的迷思概念大都集中在四、五年級，而六年級則偏向小數乘除的問題（劉曼麗, 2002）。

四、五年級有關小數的教材是以發展學生二位及三位小數概念爲主。如將這些教材內容以 Hiebert 的三種小數知識分類（1992）來看，記數系統知識可包括小數符號的寫法、讀法、位值、位名和單位小數之間的化聚；運算規則知識可包括小數與分數的互換、小數的比大小和小數的加減運算；數量表示知識可包含小數圖像表徵和單複名數轉換須涉及小數的。針對這些細部內容，再參考相關研究和文獻，探討學生可能產生的迷思概念，並將其整理如下表 1。

從文獻發現，不論過去或現在，國內外學生學習小數均有許多的迷思概念產生。而這些迷思概念大都是學生受過去所學的整數知識（如寫法、讀法、位值、位名、比大小與加減）與分數知識（如比大小）的影響，可見當學生學習小數時，對於無法掌握的問題，往往將其所知的整數知識或分數知識過度類推，而產生迷思概念。此正符合 Case（1975, 1978）所提出的診斷教學假設：「當學習者所處的學習環境，需要他掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向於發展出合理但過於簡化的解題策略。」因此，欲幫助學生破除迷思概念以改進小數教學，診斷教學應可融入到小數課程中。

三、診斷教學

「診斷」（diagnosis）原爲醫學用語，其意義是指透過診察症候，以了解此症狀背後的根本原因，並作爲消除此原因的依據（黃瑞煥和詹馨, 1982）。近年來，國內外教育學者（林福來、黃敏晃和呂玉琴, 1996; Bell, 1989, 1994）將「診斷」的概念應用在數學教學上，強調在教學過程中，教師需先診斷出學生的迷思概念，再針對迷思概念製造出認知衝突的情境，使學生察覺、承認自己的錯誤，進而調整其原有的認知。所謂「認知衝突」是指智能發展過程中原有概念（或認知結構）與現實情境不符時，在心理產生的衝突現象。認知衝突的結果，導致個人原有概念的改變（張春興, 1989）。目前，國內外已有相當多的教學實驗是依上述理念來進行，且均獲致良好的教學成效（林福來、郭汾派和林光賢, 1995; 何明昇, 1998; 李源順和林福來, 1998, 2000; 李源順, 2002; Bell, 1989; Booth, 1984; Hart, 1984; Onslow, 1986; Tirosh & Stavy, 1999; Glasgow, Ragan, Fields, Reys & Wasman, 2000），而林福來（1999）也依據多年的教學研究提出診斷教學三步驟：診斷學生所犯的迷思概念、針對學生的迷思概念製造認知衝突和進行調整學生的認知，可說是爲診斷

表 1：小數迷思概念表

小數知識		迷思概念	相關研究或文獻
記數系統知識	寫法	• 將 0.8、0.9 的下一位寫成 0.10 • 將 0.08、0.09 的下一位寫成 0.010 • 省略小數點後數字中的零	• 劉曼麗（2001; 2002）； Frobisher, Monaghan, A. Orton, J. Orton, Roper & Therlfall（2002）
	讀法	• 將小數點後面的數讀成整數	• 陳永峰（1998）； 劉曼麗（2001, 2002）； Frobisher, et al.（2002）
	位值	• 0.1 和 0.10 不一樣多 • 0.8 和 8 一樣大 • 受到整數位值的影響 1000 | 100 | • | 10 | 1 、 1 | 0.1 | • | 0.01 | 0.001	• 杜建台（1996） • Bell, Swan, & Taylor（1981） • 劉曼麗（2002）
	位名	• 受到整數位名的影響 十位 | 個位 | • | 十位 | 百位 十位 | 個位 | • | 個分位 | 十分位 千位 | 百位 | • | 十位 | 個位	• 杜建台（1996）；吳昭容（1996）； 陳文利（2001）；陳永峰（1998）； 劉曼麗（2002）；Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys（1981）
	化聚	• 直接移動小數點來決定化聚結果，如：0.9 是 9 個 0.01、36 個 0.1 是 0.36	• 陳文利（2001）； 郭孟儒（2002）； 劉曼麗（2001, 2002）
運算規則知識	小數與分數的互換	• 0.a 和 $\frac{1}{a}$ 相等 • a.b 和 $\frac{b}{a}$ 或 $\frac{a}{b}$ 相等 • $\frac{a}{100}$ 和 0.a 相等（或 $\frac{ab}{1000}$ 和 0.ab 相等）	• Irwin（2001）；Resnick, et al.（1989）； Markovits & Sowder（1991）； Moskal & Magone（2000） • 梁惠珍（2003）；劉曼麗（2002）； D'Entremont（1991）； Hiebert & Wearne（1983）； Markovits & Sowder（1991）； Resnick, et al.（1989） • Resnick, et al.（1989）
	比大小	• 小數是比 0 還小的數 • 整數法則（小數點後的位數愈多其值愈大，如 3.21 > 3.8）	• 劉曼麗（2001） • 艾如昀（1994）；吳昭容（1996）； Irwin（2001）；Resnick, et al.（1989）； Greer（1987）； Moskal & Magone（2000）； Sackur-Grisvard & Le'onard（1985）； Steinle & Stacey（1998）

續表 1：小數迷思概念表

小數知識		迷思概念	相關研究或文獻
		・分數法則(小數點後的位數愈多其值愈小，如 3.45＜3.2)	・艾如昀（1994）；吳昭容（1996）；Irwin（2001）；Resnick, et al.（1989）；Sackur-Grisvard & Le'onard（1985）；Steinle & Stacey（1998）
		・忽略小數點，如 12.7＜4.28（認爲 127 小於 428）	・吳昭容（1996）；Hiebert & Wearne（1986）；Irwin（2001）；Sackur-Grisvard & Le'onard（1985）
	加減	・將兩數向右對齊後計算，如 $\begin{array}{r} 0.38 \\ +\ 12 \\ \hline 0.50 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10.73 \\ -\ 0.5 \\ \hline 10.68 \end{array}$	・簡茂發等（1993）；艾如昀（1994）；周筱亭（1990）；陳文利（2001）；郭孟儒（2002）；劉曼麗（2002）；Hiebert & Wearne（1986）
數量表示知識	圖像表徵	・將被十等分的單位視爲 1	・梁惠珍（2003）；劉曼麗（2002）
		・將單位小數的內容物個數皆視爲 1	・梁惠珍（2003）；劉曼麗（2002）
	單複名數轉換	・將小數點做爲大單位與小單位的區隔，如 5.9 公斤是 5 公斤 9 公克、2 公尺 7 公分是 2.7 公尺	・陳永峰（1998）；郭孟儒（2002）；劉曼麗（2002）；戴政吉（1999）

教學提供了一個具體實施的方向。

此外，學者們多以溝通討論的方式來進行診斷教學。Onslow（1986）認爲教師進行診斷教學時，應提供開放性的活動、含認知衝突的討論、穩固概念的練習題。Bell（1993, 1994）則認爲教師要能提供學生機會產生認知衝突，並能針對所產生的衝突進行徹底討論，而形成學生新的知識結構，再進而對學生提出問題做回饋以鞏固學生的概念。李源順和林福來（2000）則建議數學教師在教學過程中使用溝通教學取向進行教學，學生就有機會在討論或演示數學的過程中將其迷思概念呈現出來，而教師便可診斷出學生的錯誤。由此可知，強調溝通討論的教學方式，對進行診斷教學而言應是相當可行的。

叁、研究方法

本研究目的主要在將診斷教學理念融入於國小的小數教學中，探討診斷教學的實施情形與是否能有效改善學生的小數迷思概念，以增進學生小數概念的學習。透過教學歷程和教師訪談來了解診斷教學的實施情形，以教學前、後與延後測的筆試表現、學生習作和學生訪談來了解學生小數學習的成效和迷思概念的改變情形。以下說明研究過程。

一、小數診斷教學模式

整合文獻探討的結果，本研究擬以林福來（1999）提出的診斷教學三步驟爲主軸，以強調溝通討論的教學方法進行診斷教學，並將診斷教學三步驟融入在「教師布題－學生解題－溝通討論－質疑辯證－形成共識－再布題檢驗」的教學中。進一步言之，在教師布題－學生解題的過程中，教師便可藉由一些含有迷思概念的布題，經由行間巡視或讓學生發表答案（如請學生將答案寫在白板

上）來診斷其可能具有的迷思概念。在溝通討論的過程中，學生的解題想法便有機會呈現出來，教師也能進一步地診斷出學生解題想法背後的迷思概念，以做爲下一步製造認知衝突的參考依據。接著，教師便可趁機以不同學生的想法或舉出異例等方式製造出認知衝突，讓學生在質疑、辯證彼此的想法中檢驗或修正自己的解法。此時，教師也可點出解題的關鍵處，進而與學生形成共識，最後達到認知調整的目的。再者，在進行診斷教學時，Bell（1993）強調教師尚需利用進一步的問題作回饋以鞏固學生的概念，因此在形成共識後，教師緊接著可再布題檢驗以強化學生的概念。另外，在一般教學中，教師既要複習學生的舊經驗，又要教授學生新的知識；因此將診斷教學融入正規課程時，一方面可對學生舊經驗中已存有的迷思概念，予以診斷並進而達到破除之效；另一方面可對學生學習新知識時可能過度類推舊知識而產生的錯誤解法，予以診斷並進而達到預防之效。雙管齊下，在學生概念的澄清上應有不錯的成效。此外，在這來回之間還要加強連結階段，隨時讓學生操作表徵，透過等分概念將小數與分數做連結，並強調多單位記數系統，以促進學生小數概念的學習。茲將整個教學設計模式摘要如下圖 1：

二、研究樣本

本研究採方便取樣，以來自高屏地區有意願參與本研究的教師及其班級爲主。經過各方面的因素考量及仔細篩選，最後以四、五年級各有兩位教師共四班學生參與本研究（分別以 4a、4b、5a、5b 代表其所屬的班級），其中每個年級城鄉各一班，四年級共 50 人，五年級共 48 人。此外，依據各班學生的數學學業成就，將四班 98 位學生分成三個等級（高、中、低），自四班各個等級隨機選取二位學生共 24 位參與前、後測訪談，以深入了解學生迷思概念的改變情形。

三、實驗處理

爲能看到診斷教學融入於教學現場的多樣情形，四位教師均有興趣嘗試診斷教學。每位參與實驗教學研究的教師在進行教學前，皆在研究者的帶頭下，共同閱讀有關小數迷思概念與診斷教學理念的文獻，研討學生可能在課堂上出現的迷思概念與可用於小數診斷教學的策略。此外，研究者並以小數大小比較活動爲例，向教學實驗的四位教師說明小數診斷教學的進行模式。掌握診斷教學進行的步驟及其精神後，四位教師仍須以該班所使用的數學教材內容（四年級爲康軒版本第八冊第八單元「小數」，五年級爲南一版本第十冊第二單元「小數」），及其預定的教學進度爲主。教學前先檢視教材內容中哪些問題可以直接診斷這些迷思概念，而哪些問題須再引入關鍵性問話才能進行診斷（見附錄）。教學時，如學生有出現迷思概念，教師應修正以往重新再講一遍或直接糾正的教學方式，改以診斷教學的三步驟，幫助學生破除迷思概念。倘若學生未出現迷思概念時，可於原本就會進行的類似題練習中，引入含有迷思概念的衝突情境去考驗學生的概念是否穩固，所以融入的診斷教學部分應不會影響正常的教學。

另外，本研究擬透過筆試前後測結果，及學生習作的分析，來探討小數診斷教學對迷思概念的改變情形和學習成效。再加入延後測，考驗學生迷思概念改變後的穩固性。然考慮前後測差異不能確保是診斷教學處理的唯一因素，故再經由後測訪談來確認學生迷思概念的改變原因。爲了易於探討及分析比較，前測、後測及延後測的工具是採用同一份試題（關於此爭議性，也曾請教過數位數學教育專家）。試題內容符合課本單元所欲教授的概念，但不在課堂中教授，而前測結果可使教師初步了解

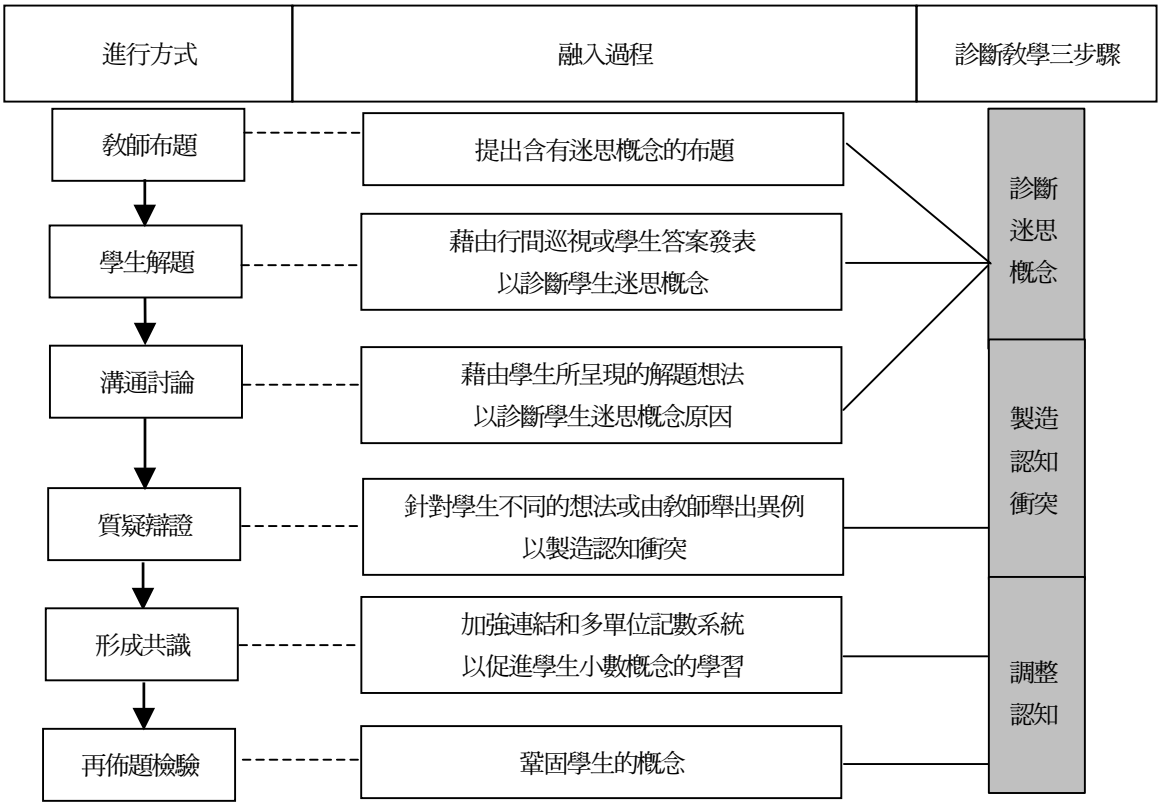


圖 1：診斷教學設計模式圖

該班學生可能存有的迷思概念。考量後測與延後測兩次筆試時間相距太近會有練習與記憶之嫌，而相距太久又會因其它概念的學習，而使學生有所成熟，故安排延後測在後測的六週後進行，且期間則避免任何有關小數教材的學習。

四、研究工具

本研究工具主要依據所欲進行診斷教學單元的教材內容與相關的舊經驗，及參考劉曼麗（2002）的研究工具來編製，包含筆試 I 和 II，筆試 I 是爲四年級學生設計的，內容包括小數的圖像表徵、小數與分數的互換、化聚、寫法、讀法、比大小和單複名數轉換等概念；筆試 II 則爲五年級，內容包括小數的化聚和比大小等概念。試題編製好之後，一方面請 2 位數學教育領域的師院教授提供修正意見，另一方面選取高雄市二所國小的四、五年級學生各二班共 134 人進行預試，並於施測後一週再進行重測，以瞭解研究工具的信度，筆試 I 的庫李信度.94，重測信度爲.77；筆試 II 的庫李信度.93，重測信度爲.85。

五、資料處理

本研究透過筆試、教學錄影、學生習作及訪談來收集資料。在筆試部分，將前測、後測及延後測試卷編碼登錄，以百分比統計和 t 檢定考驗來探討學生小數迷思概念的改變情形和學習成效。在教學錄影部分，將結果轉錄成書面資料，分析四位教師將診斷教學三步驟融入教學的實踐情形。在習作部分，將全班的答題結果進行迷思概念分析，以做爲探討學生學習

成效和迷思概念改變的佐證資料。在訪談部分，將 24 位學生的前、後測訪談結果及四位教師教學心得的訪談結果轉錄成書面資料，以分析學生迷思概念的改變情形，及了解教師在進行診斷教學時所面臨的困難。

肆、研究結果與討論

一、筆試結果

本研究以國小四、五年級學生各二班進行小數診斷教學。表 2、3 分別呈現前測與後測、後測與延後測成績之 t 考驗結果，發現後測成績優於前測（$p < .01$），且後測與延後測無顯著差異；此正顯示學生在接受診斷教學後，其小數學習也有立即成效和保留成效。

表 4、5 分別呈現四、五年級學生在前、後及延後測所出現的迷思概念及其百分比。其中，四年級有七類迷思概念，五年級則有三類迷思概念，而此三類迷思概念也都出現在四年級中。由後測結果發現，五年級出現的三類迷思概念中，減少比例皆在二成左右；而四年級減少「整數法則」迷思概念的學生有高達五成半，且其餘迷思概念的減少情形也大都在二、三成。進一步對照後測與延後測的結果發現，延後測時，五年級在「整數法則」和「向右對齊」迷思概念，四年級在「以小數點作爲大小單位的區隔」和「向右對齊」迷思概念的人數比例比後測略爲增多。究其原因，可能是學生概念還不夠穩固所致。然而，其他的迷思概念人數比例均與後測差不多，甚至有下降的情形。大體而言，診斷教學對於學生迷思概念有改善的效果。

二、教學實踐歷程

針對前測結果，四年級教師在課堂上共進行了「將被十等分的單位視爲 1」、「a.b 和$\frac{b}{a}$相等」、「將小數點後面的數讀成整數」、「直接移動小數點來決定化聚結果」、「整數法則」、「以小數點作爲大小單位的區隔」和「利用直式算則，靠右對齊」七類迷思概念的診斷教學，五年級則進行「直接移動小數點來決定化聚結果」、「整數法則」和「利用直式算則，靠右對齊」三類。表 6、7 分別呈現四位教學者在課堂中所用以製造認知衝突的策略及調整認知的方法。爲了更深入了解診斷教學在小數教學上的實施及對學生迷思概念的改變情形，但又限於文章篇幅限制，以下只呈現教師 T_{4a} 在迷思概念「a.b 和$\frac{b}{a}$相等」及教師 T_{5b} 在迷思概念「整數法則」的診斷教學歷程、學生筆試結果和此二位教師的省思舉隅。

(一)T_{4a} 在迷思概念「a.b 和$\frac{b}{a}$相等」的診斷教學實踐歷程

1. 前測中了解學生存有的迷思概念

T_{4a} 在前測訪談時，發現學生在前測題 2-3-3「虎妞吃了 9.7 袋葵花子，用分數表示也可以說是吃了幾袋？」中，存有將 a.b 視爲$\frac{b}{a}$的迷思概念。舉例如下：

S_2：因爲前面的當分母，後面的當分子。（S_2 爲該班中程度） **T_{4a}：那 9.7 用分數表示是多少？** **S_2：$\frac{7}{9}$ 。**	**S_5：前面的是分母，「.」就是「一」，後面的是分子。（S_5 爲該班低程度）** **T_{4a}：那 9.7 用分數表示是多少？** **S_5：$\frac{7}{9}$ 。** **T_{4a}：那 0.4 化成分數是多少？** **S_5：（搖頭）。**

2. 課堂中診斷迷思概念

T_{4a} 在進行二位小數與分數互換的教學前，透過與筆試試題相同結構但不同數字的問題，先連結學生一位小數與分數互換的舊經

表 2：前測與後測成績之差 t 檢定表

年級	平均數之差	標準差	t 值	顯著性
四	-7.46	6.14	-8.59	.000
五	-5.29	3.50	-10.47	.000

表 3：後測與延後測成績之差 t 檢定表

年級	平均數之差	標準差	t 值	顯著性
四	-0.42	3.33	-0.89	.376
五	4.17E-02	3.23	0.09	.929

驗。在複習過程中，利用「小白板」讓學生已有的迷思概念現形，當下診斷出學生含有「$a.b=\frac{b}{a}$」的迷思概念。

T_{4a}：5.3 化成分數，是多少？請寫在白板上（教師巡堂時發現有出現$\frac{3}{5}$的錯誤答案）

T_{4a}：請 S_{10} 告訴我們，他寫的答案是多少？

S_{10}：$\frac{3}{5}$。（迷思概念）

T_{4a}：你的答案和他一樣的請舉手。（4 人，分別為 S_2、S_3、S_5、S_{14}）

T_{4a}：請 S_{10} 告訴我們，他怎麼知道的？

S_{10}：……（沉默不語）

T_{4a}：有沒有人可以救他？（S_3 舉手）

T_{4a}：好！那請 S_3 說說看。

S_3：因為 5.3 中有 5 和 3，所以 5 就變成分母，然後 3 變成分子。

T_{4a}：同意他的說法的請舉手？（其他同學議論紛紛，以致原先有如此寫法的學生有所遲疑而未舉手）

由上述學生的回答，發現學生 S_3 是將 5.3 中所包含的數字 5 和 3，分別視爲分數的分母和分子。在發表錯誤想法中，因爲引起有正確認知同學的議論，使得原先將 5.3 視爲$\frac{3}{5}$的學生，也對自己的想法，產生了懷疑和不肯定感，此時正是製造學生認知衝突的大好時機。

3. 討論中製造認知衝突

藉由和學生討論的過程中，T_{4a} 使用「表徵法」的策略，透過學生熟悉的表徵（積木）來連結 5.3 和$\frac{3}{5}$的意義，讓學生從操作中發現 5.3 和$\frac{3}{5}$所呈現出的數量並不相同，來製造學生的認知衝突。

T_{4a}：S_3！5.3 條橘色積木，要怎麼拿？

S_3：5 條橘色積木又 3 個白色積木。

T_{4a}：那$\frac{3}{5}$條橘色積木，要怎麼拿？

S_3：5 條橘色積木又 3 個白色積木。

（無法引起學生認知衝突時，立即改用另一策略）

T_{4a} 並未想到學生 S_3 雖會透過積木來連結小數符號 5.3 的意義，但對分數符號$\frac{3}{5}$的意義，則以數字中的 5 和 3 來表徵，以致無法對該生產生認知衝突。還好 T_{4a} 隨即改成讓學生先說明$\frac{3}{5}$和 5.3 的意義，再改用引入參考值法，透過「1」，讓學生分別比較「$\frac{3}{5}$」、「5.3」和「1」的大小。

T_{4a}：S_3！$\frac{3}{5}$是什麼意思？

S_3：……。（聳肩，沉默不語）

T_{4a}：那……。S_5，請你告訴我，$\frac{3}{5}$是什麼意思？（S_5 為剛才出現迷思概念的學童之一）

S_5：把 1 分成 5 份，取裡面的 3 份。

T_{4a}：$\frac{3}{5}$是把 1 分成 5 份，取裡面的 3 份，大家同意嗎？

S_s：同意。（多數學生有點頭動作）

T_{4a}：$\frac{3}{5}$是把 1 分成 5 份，取裡面的 3 份，那$\frac{3}{5}$有沒有比 1 大？

S_s：沒有。（剛才出現迷思概念的學童 S_{10}、S_2 也回答沒有）

表4：四年級學生迷思概念百分比統計表

教材內容	迷思概念	百分比		
		前測	後測	延後測
圖像表徵	・將被十等分的單位視爲1。	58	40	34
小數與分數的互換	・a.b 和$\frac{b}{a}$相等。	10	6	6
讀法	・將小數點後面的數讀成整數	40	10	10
化聚	・直接移動小數點來決定化聚結果	52	36	26
比大小	・整數法則	62	6	6
單複名數轉換	・以小數點作爲大小單位的區隔	70	58	66
加減	・利用直式算則，靠右對齊	48	14	18

表5：五年級學生迷思概念百分比統計表

教材內容	迷思概念	百分比		
		前測	後測	延後測
化聚	・直接移動小數點來決定化聚結果	40	21	21
比大小	・整數法則	17	0	6
加減	・利用直式算則，靠右對齊	27	4	15

T_{4a}：好！那再看看 5.3 有沒有比 1 大？

S_s：有。

T_{4a}：S_2，你說說看，為什麼 5.3 有比 1 大。

S_2：因為 5.3 是 5 再多一點點，5 就已經比 1 大了。

T_{4a}：你們同意他的說法嗎？

S_s：同意（剛才出現迷思概念的學童 S_5、S_{10}、S_{14} 點頭，但 S_3 還是很疑惑的表情）

T_{4a}：$\frac{3}{5}$比 1 少，可是 5.3 比 1 大，那你們覺得 5.3 化成分數，答案有可能是$\frac{3}{5}$？

S_s：不可能。

T_{4a}：S_2、S_3、S_5、S_{10}、S_{14}（剛才出現迷思概念的學童）你們同意嗎？

S_2、S_3、S_5、S_{10}、S_{14}：（點頭）

（學生對老師的策略提出反駁）

當 T_{4a} 進行認知調整的步驟前，竟然半路殺出程咬金，班上一名高程度的學生舉手發問：「那 2.7 咧？2.7 比 1 大，$\frac{7}{2}$ 也比 1 大呀？」（其他人議論紛紛）面對上述的情況，T_{4a} 壓根沒想到學生會出現如此的質疑，只想到再以 8.6 爲例，請學生將 8.6 化成分數。讓學生發現這樣的解題方式，所得到的答案又將與事實不符(8.6 大於 1，$\frac{6}{8}$ 小於 1，兩者不可能相等)，以協助學生察覺其原有認知的侷限性。

T_{4a}：$\frac{6}{8}$比 1 少，可是 8.6 比 1 大，那你們覺得 8.6 化成分數，答案有可能是$\frac{6}{8}$？

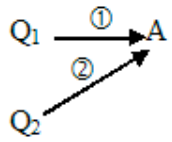
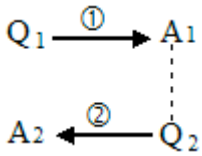
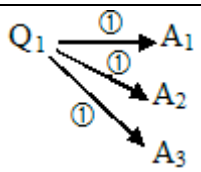
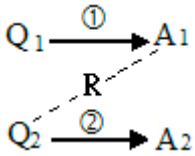
S_s：不可能。

T_{4a}：所以囉，你們想想，如果把 2.7 直接變成 $\frac{7}{2}$，這樣可以嗎？

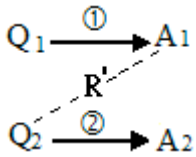
S_s：不行。

針對上述的教學歷程，T_{4a} 雖能即時突顯學生想法的侷限性，但其所使用的認知衝突策

表 6：製造認知衝突的策略

策略	圖示	舉例說明
二對一法		針對學生回答問題 Q_1 的錯誤答案 A，再舉另一問題 Q_2，使其答案也爲 A，以製造認知衝突。 舉例如下（化聚問題） Q_1：0.9 是幾個 0.01？ A：9 個。 Q_2：0.09 是幾個 0.01？（或 0.9 是幾個 0.1？） A：9 個。
反向法		針對學生錯誤答案 A_1，再由 A_1 這個答案反問回去，得到答案 A_2，並對照原問題 Q_1，以製造認知衝突。 舉例如下（小數與分數的互換問題） Q_1：$\frac{85}{1000}$ 化成小數是多少？ A_1：0.85。 Q_2：0.85 化成分數是多少？ A_2：$\frac{85}{100}$ 。
一對多法		針對同一問題 Q_1，同時出現若干答案 A_1、A_2、A_3…，透過學生間的質疑辯證，以製造認知衝突。 舉例如下（單複名數轉換問題） Q_1：1 公尺 5 公分是等於幾公尺呢？ A_1：15 公尺。 A_2：1.5 公尺。 A_3：1.05 公尺。 Q_2：辯證想法。
引入參考值法		針對學生錯誤答案 A_1，引入一個參考值 R 讓學生比較其答案 A_1 與 R，以製造認知衝突。 舉例如下（小數與分數的互換問題） Q_1：5.3 化成分數是多少？ A_1：$\frac{3}{5}$。 Q_2：$\frac{3}{5}$有沒有比 1 大？ A_2：沒有。 $Q_{2'}$：5.3 有沒有比 1 大？ $A_{2'}$：有。 $Q_{2''}$：$\frac{3}{5}$比 1 小，5.3 比 1 大，5.3 化成分數，答案有可能是$\frac{3}{5}$？ $A_{2''}$：不可能。

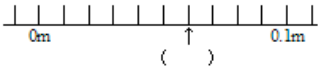
續表 6：製造認知衝突的策略

策略	圖示	舉例說明
表徵法		針對學生錯誤答案 A_1，引入表徵 R'的操作結果，來比較答案 A_1，以製造認知衝突。 舉例如下（比大小問題） Q_1：0.25 和 0.5，誰比較大 A_1：0.25，因爲 25 比 5 大。 Q_2：這是一張百格板，那 0.25 張百格板要拿哪些積木？ A_2：2 條橘色積木和 5 個白色積木。 $Q_{2'}$：那 0.5 張百格板呢？ $A_{2'}$：5 條橘色積木。 $Q_{2''}$：誰比較多？ $A_{2''}$：0.5 比較多。

註：Q_i：教師的佈題，A_i：學生的答案，R：參考值，R'：表徵。

Q_1：佈題，Q_2：關鍵性問話，用以製造學生的認知衝突。

表 7：調整認知的方法

方法	舉例說明
透過具體物的操作	如利用說明 0.25 張百格板可表徵爲 2 條橘色積木和 5 個白色積木，而 0.5 張百格板則可表徵爲 5 條橘色積木，所以 0.25＜0.5。
直接連結純小數與分數的關係	如說明 5.3 是 5 和 0.3 合起來的，其中 0.3 是$\frac{3}{10}$，所以 5.3 也可說是 5 和$\frac{3}{10}$合起來的，所以 5.3 化成分數是 $5\frac{3}{10}$。
透過等分概念	如說明 1 被十等分後的單位是 0.1，而 0.1 再被十等分後的小單位與 1 被百等分後的小單位一樣都是 0.01，所以括號中的數字爲 0.06m。 
利用多單位記數系統	如說明 0.507 是 507 個 0.001，0.8 是 800 個 0.001，0.36 是 360 個 0.001，800＞507＞360，所以 0.8＞0.507＞0.36。。

略---引入參考值「1」，本身也有侷限性（僅適用於眞分數）。倘若，T_{4a} 能即時改用其它的參考值，如比較 2.7 與$\frac{7}{2}$時，則變換參考值爲「3」，即使在面對不同的假分數情境（$\frac{5}{2}$除外），應也能運用自如，而不必再搬出另一例來化解危機。

4. 講解中調整認知

在學生產生認知衝突之後，T_{4a} 透過「多單位記數系統」，先從小數的記數系統知識來協助學生掌握 5.3 是 5 個 1 和 3 個 0.1 合起來的結果，再透過學生已熟悉的分數符號（十等分割情境的眞分數）來連結「純小數與分數的

互換關係」，如透過$\frac{3}{10}$來連結 0.3 與$\frac{3}{10}$的直接互換關係。然後以整數和眞分數的合成結果，說明帶小數與分數互換的規則，以幫助犯錯的學生重新調整其原有的認知。

T_{4a}：5.3 的 5 和 3 分別表示多少？

S_s：……。

T_{4a}：5 是表示有 5 個多少合起來的？

S_s：5 個 1。

T_{4a}：那 5.3 的 3 呢，是表示有 3 個多少合起來的？請寫下來。(教師巡堂)

T_{4a}：很多人都寫出來了，寫出來的人請告訴我答案是什麼。

S_s：3 個 0.1。

T_{4a}：所以 5.3 是表示 5 個 1 和 3 個 0.1。3 個 0.1 就是…

S_s：0.3。

T_{4a}：那請再想一想 0.3 化成分數是多少？請寫在白板上。(教師巡堂)

T_{4a}：很棒喔！幾乎全部的小朋友都寫對了，所以 0.3 化成分數應該是多少？(1 名低程度無法做答)

S_s：$\frac{3}{10}$。

T_{4a}：可是題目是問 5.3 化成分數是多少，現在知道 0.3 化成分數是$\frac{3}{10}$，那 5 怎麼辦？

S_{12}：把 5 放在$\frac{3}{10}$的前面，因為 5.3 是 5 加上 0.3，也就是 5 加上$\frac{3}{10}$，那就是$5\frac{3}{10}$。

T_{4a}：你們聽懂了嗎，聽懂得請舉手。

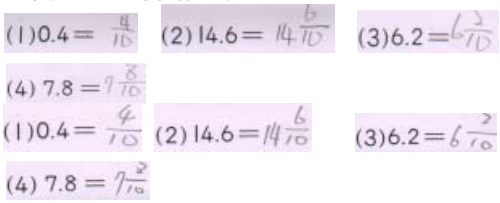
S_s：(全班舉手表示聽懂)。

5. 習作及後測中了解學生迷思概念的改變情形

T_{4a} 透過小數記數系統知識來協助學生建構正確的小數概念，但爲了進一步確認具有迷思概念的學童，是否已眞正產生認知衝突，或者只是人云亦云，T_{4a} 將對學生的習作進行檢驗，以期了解學生的迷思概念是否已經改善或破除了。從學生的習作中，T_{4a} 發現具有迷思概念的學生在遭逢認知衝突後，多數都能放棄原有的錯誤想法，且能獲得正確概念。

另外，班上學生 S_2 和 S_5 原先在前測中出現將 a.b 視爲$\frac{b}{a}$的迷思概念，經過課堂中的認知衝突經驗及調整認知之後，在習作和後測時已能成功解題。

(習作的作答情形)

S_2： 

S_5：

(四年級題 2-3-3：虎妞吃了 9.7 袋葵花子，用分數表示也可以說是吃了幾袋？)

S_2：因爲 9.7 就是 9 和 0.7，0.7 變成分數是$\frac{7}{10}$，所以 9.7 是$9\frac{7}{10}$。 **T_{4a}：那 9.7 可以說是$\frac{7}{9}$嗎？** **S_2：不行。因爲 9.7 裡面有 9 個 1，可是$\frac{7}{9}$裡面沒有超過 1。**	**S_5：9.7 是$9\frac{7}{10}$。** **T_{4a}：那 9.7 是$\frac{7}{9}$嗎？** **S_5：嗯！不是。** **T_{4a}：爲什麼？** **S_5：因爲 9.7 就是 9 和 0.7，已經超過 1 了。**

在 T_{4a} 引入參考值法的策略下，S_2 和 S_5 在課堂中有 5.3 和$\frac{3}{5}$不可能相等的認知衝突經驗，所以在習作和後測中，對於小數化分數的問題，便不再存有原有的迷思概念，並能成功解題。

6. 教學後 T_{4a} 的感想

T_{4a} 認爲學生極有可能是因爲先備知識不足而不易引起認知衝突，故教學前宜先進行補救教學，補足其先備知識，才能有效發揮診斷教學之效。

T_{4a}：實施診斷教學時，我發現好像都是那三步驟的循環，就是將迷思概念診斷出來後，就試圖製造學生的認知衝突，學生的認知產生衝突後，老師再協助他調整並建構正確的認知，整個教學歷程一直重複做這些事。將診斷教學融入之後，我發現，原來迷思概念也可能出現在高程度的學生身上，以前我都覺得他們都會呀，沒想到這些學生的想法才真叫我驚訝。在製造認知衝突時，有時候學生雖然認同你的說法，但他們好像也不覺得自己原先的答案是錯誤的，這讓我也當場傻眼了！隨後，我又趕緊試試別的方式，看看是不是能夠讓學生產生衝突，不過對低程度的學生而言，效果好像不太好，因為沒有足夠的相關概念，起點行為非常的嚴重不足，他們不容易知覺自己的錯誤，很難產生認知衝突。我想，任何新概念進行教學前，補齊先備知識是不容忽視的。

(二)T_{5b} 在迷思概念「整數法則」的診斷教學實踐歷程

1. 前測中了解學生存有的迷思概念

T_{5b} 在前測訪談時，發現班上學生在前測題 2-7「紅色的繩子長 0.368 公尺，藍色的繩子長 0.45 公尺，白色的繩子長 0.2 公尺，請問（1）最長的繩子是（　）色。(2）最短的繩子是（　）色。」中，存有整數法則的迷思概念。舉例如下：

S_{13}：368 比 45 和 2 大，所以是紅色最長，2 最小，所以白色的最短。（S_{13} 爲該班低程度）	**S_{16}：看小數點後面的數，368 比 45 大，45 比 2 大，所以是紅色最長，白色的最短。（S_{16} 爲該班高程度）**

2. 課堂中診斷迷思概念

T_{5b} 在進行小數大小比較的教學時，考量同位數的小數情境，不易診斷出學生是否存有整數法則和分數法則的迷思概念，所以將佈題內容修改爲不同位數的小數（有別於筆試試題中比大小的數字），請學生在自己的白板上做練習，以診斷學生的迷思概念。

T_{5b}：在 1 分鐘之內，S_8 跑了 0.507 公里，S_{13} 跑了 0.8 公里，S_{16} 跑了 0.36 公里，他們跑的距離，誰跑的距離比較長，誰跑的距離比較短？請寫在白板上，要用＜或＞的符號來表示。

T_{5b} 巡堂時，發現有學生出現「整數法則」或「分數法則」的迷思概念：

T_{5b}：老師發現有幾種不同的答案（板書 0.507＞0.36＞0.8、0.8＞0.507＞0.36、0.8＞0.36＞0.507）。

T_{5b}：同意 0.507＞0.36＞0.8 的人請舉手（S_4、S_7、S_{13}、S_{16}）；同意 0.8＞0.507＞0.36 的請舉手（11 名）

3. 討論中製造認知衝突

T_{5b} 透過「一對多法」的策略，讓學生發現彼此的答案不一樣後，再透過溝通與討論以澄清彼此的想法。T_{5b} 發現犯有整數法則的學生 S_{16}，似乎是忽略小數點的存在，而將小數當作整數來比較。

T_{5b}：我們先請 S_{16} 來說說看，他是怎麼想的？（S_{16} 在該班是屬於高程度的學生）

S_{16}：因為 507 比 36 大，36 又比 8 大。

接著，在同儕間的質疑辯證過程中，S_{13} 對正確解題學生 S_3 的說法表示認同，但 S_{16} 仍表疑惑。

S_S：錯了！S_{16} 說錯了，答案不是 0.507＞0.36＞0.8！（此起彼落）

S_4：應該是 0.8＞0.507＞0.36。

T_{5b}：怎麼說呢？

S_4：（傻笑）

T_{5b}：有沒有其他人會說？

S_3：因為 0.8 有 8 個 0.1，0.507 有 5 個 0.1，0.36 只有 3 個 0.1，所以 0.8 最大，0.36 最小。

T_{5b}：其他人覺得呢？

（班上一些同學點頭）

T_{5b}：S_{13}、S_{16} 你們覺得呢？（剛剛 S_{13} 也有出現整數法則，S_{13} 點頭，S_{16} 聳肩表示不知道）

（T_{5b} 進一步了解 S_{16} 的小數記數系統知

識）

在師生辯證的過程中，T_{5b} 發現 S_{16} 其實是能掌握小數記數系統知識，因此 T_{5b} 配合 S_{16} 的說明（0.507 是 507 個 0.001、0.8 是 8 個 0.1），繼續追問下去，讓 S_{16} 察覺只從小數點右邊的數來比大小是不對的。

T_{5b}：剛剛 S_{16} 說 507 比 36 大，36 又比 8 大，所以 507 最大。可是這裡是說 0.507 耶，為什麼會是 507？

S_{16}：小數點後面是 507，所以是 507。

T_{5b}：那 0.507 和 507 有一樣嗎？

S_{16}：不一樣，0.507 是 507 個 0.001。

T_{5b}：那 0.8 為什麼會是 8，這個 8 代表什麼？

S_{16}：8 個 0.1。

T_{5b}：那 0.507 還是最大的嗎？

S_{16}：不是。

T_{5b}：為什麼？

S_{16}：因為 507 和 8 單位不一樣。

4. 講解中調整認知

T_{5b} 透過「多單位記數系統」，讓學生知道單位相同才能做比較。接著要求學生將 0.8 和 0.36 都換成幾個 0.001 後，再和 507 個 0.001 做比較。

T_{5b}：那 0.8 除了可以表示成 8 個 0.1 之外，那 0.8 還可以表示成幾個 0.001？

S_{16}：嗯…

T_{5b}：S_7，你說說看 0.8 可以表示成幾個 0.001。（S_7 剛才也寫 0.507＞0.36＞0.8）

S_7：800 個。

T_{5b}：所以 0.507 變成 507 個 0.001 之後，是應該要和 8 個 0.1 來比，還是要和 800 個 0.001 來比，才恰當。S_{16}，你說說看。

S_{16}：800 個 0.001。

T_{5b}：所以 0.507 和 0.8，誰比較大？

S_{16}：0.8 比較大。

T_{5b}：那 0.36 呢，應該怎麼辦？

S_S：360 個 0.001。

T_{5b}：把 0.507、0.36 和 0.8 都化成 0.001 之後，分別有 507 個 0.001、360 個 0.001 和 800 個 0.001，這時候，我們才能比較 507、360 和 800 之間的大小關係，而這三個的大小關係才能表示 0.507、0.36 和 0.8 之間的大小關係，那結果是誰比較大？

S_S：0.8＞0.507＞0.36。

（同時出現兩種迷思概念時，無法兼顧）

在此部分教學時，T_{5b} 班上的學生還出現了分數法則（0.8＞0.36＞0.507）的迷思概念，但 T_{5b} 僅對整數法則的學生製造認知衝突後，隨即進行認知調整，而忽略了有分數法則迷思概念的學生。

5. 練習題及後測中了解學生迷思概念的改變情形

T_{5b} 透過「多單位記數系統」來協助學生建立小數比大小的正確概念，但考量習作的練習題都是相同位數的比大小，不易進一步確認學生的迷思概念是否已經改善或破除了，故在課後特別提供不同位數的小數比大小練習題。從學生的練習題表現中，T_{5b} 發現具有迷思概念的學生在遭逢認知衝突後，多數都能放棄原有的錯誤想法，且能獲得正確概念。

另外，班上學生 S_{13} 和 S_{16} 原先在前測中出現的整數法則迷思概念，經過課堂中的認知衝突經驗及調整認知後，在練習題和後測時已能成功解題。

（練習題的作答情形：把 0.801，0.7，0.97 三個數，由小到大排列出來。）

S_{13}：

S_{16}：

（五年級題 2-7：紅色的繩子長 0.368 公尺，藍色的繩子長 0.45 公尺，白色的繩子長 0.2 公尺，請問（1）最長的繩子是（　）色。（2）最短的繩子是（　）色。）

S_{13}：藍色最長，白色的最短。 T_{5b}：怎麼知道的？ S_{13}：看十分位，4 最大。 T_{5b}：爲什麼要看十分位？ S_{13}：個位是 0，再來最大的就是十分位，它代表 0.1。 T_{5b}：可不可以說 368 比 45 和 2 大，所以是紅色最長？ S_{13}：不可以。 T_{5b}：爲什麼？ S_{13}：0.368 只有 3 個 0.1，而 0.45 有 4 個 0.1。	S_{16}：要化成相同的位數才能比，0.368 是 368 個 0.001、0.45 是 450 個 0.001、0.2 是 200 個 0.001，450 比 368 和 200 大，所以是藍色最長，白色的最短。 T_{5b}：可以只看小數點後面的數，用 368、45 和 2 來比嗎？ S_{16}：不可以，因爲它們的單位都不一樣。368 的單位是 0.001，45 的單位是 0.01，2 的單位是 0.1，要都用相同的 0.001 才可以比。

在 T_{5b} 透過小數記數系統知識的引導下，S_{13} 和 S_{16} 在課堂中，經過只以小數點後面的數來做比較是不對的認知衝突經驗，所以在練習題和後測中，對於小數比大小的問題，便不再存有原有的迷思概念，並能成功解題。

6. 教學後 T_{5b} 的感想

從 T_{5b} 的教學中發現，當學生將小數視爲整數來進行大小比較時，T_{5b} 能提出學生犯此迷思概念的關鍵處，在於學生忽略將小數化成整數後所表示的計數單位（0.1、0.01、0.001）不一，即使能記憶整數比大小的比較規則，也無法成功解題。T_{5b} 隨即配合學生犯錯的關鍵處，利用學生原有的小數記數系統知識，將不同小數化成相同的單位，以製造學生的認知衝突和調整學生的認知。在教學完成後，他談到：

T_{5b}：平常上課時，我並不會特別對有迷思概念的學生製造認知衝突，所以經常上課講過很多遍的概念，學生還是會犯錯。可是，經過這次的經驗，我發現那些犯錯的學生，其實並不是亂寫，有些是受到以前的學習經驗而受到影響，所以想法上有疏失。對這些有迷思概念的學生，因為在課堂上有特別的認知衝突經驗，故於事後的練習，錯誤情形減少許多，而且這些學生好像也比較有信心。診斷教學的三步驟，跟平時上課的方式很像，不用刻意去準備或重新設計教材內容，只要在上課時多留意學生的犯錯想法，盡可能在教學當時能設法對他製造認知衝突，對學生在事後的練習很有幫助，也減少了我私下對這些學生進行補救教學的次數。我想，以後在其他的概念教學上，我也會嘗試用這套教學模式來進行教學。還有，面對一群有迷思概念的學生，會有點手忙腳亂，不知先顧哪一個？又怕會顧此失彼，這點對我而言還是一個難點。

伍、結論與建議

本研究的主要的目的是將診斷教學理念融入在正規的小數教學中，並探討其實施情形和學生在迷思概念的改變情形。本研究所進行的診斷教學是以林福來（1999）提出的診斷教學三步驟（診斷迷思概念、製造認知衝突、調整認知）爲主軸，將此三步驟融入在「教師布題－學生解題－溝通討論－質疑辯證－形成共識－再布題檢驗」的教學中，透過溝通討論的教學方法進行診斷教學。

在診斷教學過程中，四年級教師於課堂上共進行了「將被十等分的單位視爲 1」、「a.b 和 $\frac{b}{a}$ 相等」、「將小數點後面的數讀成整數」、「直接移動小數點來決定化聚結果」、「整數法則」、「以小數點作爲大小單位的區隔」和「利用直式算則，靠右對齊」七類迷思概念的診斷教學，五年級則進行「直接移動小數點來決定化聚結果」、「整數法則」和「利用直式算則，靠右對齊」三類；製造認知衝突的策略有「二對一法」、「反向法」、「一對多法」、「引入參考值法」和「表徵法」五類；調整認知的方法包括「透過具體物的操作」、「直接連結純小數與分數的關

係」、「透過等分概念」和「利用多單位記數系統」四類。筆試結果顯示，診斷教學能有效地改變學生的小數迷思概念，並對學生在小數的學習上有立即提昇及保留的效果。從學生的習作和後測訪談結果也提供了我們另外的證據，顯示出學生的迷思概念確能獲得一些改善。尤其是，經過課堂上認知衝突的經驗後，有些有迷思概念的學生可以清楚的知道自己原先想法不對，因此印象深刻而難以忘懷。所以這些學生在練習相同概念時，便不再存有先前的迷思概念，如 T_{4a} 班上的 S_2，透過 T_{4a} 使用參考值的策略，產生認知衝突後，非常的清楚 5.3 與 $\frac{3}{5}$ 並不相等，所以在後測中，便不再將 9.7 化成 $\frac{7}{9}$；再如 T_{5b} 班上的 S_{16}，透過 T_{5b} 從小數記數系統知識的引導中，產生認知衝突後，非常清楚不同位數的小數（0.507、0.8、0.36）要化成相同的單位小數（0.001）後才能做比較。所以在後測中，便不再出現整數法則的迷思概念。

診斷教學的主要功能是在改變學生的迷思概念。教師在教學時，如能當下診斷學生的迷思概念、適時的製造認知衝突並能立即調整學生的認知，這樣的教學方式，遠比事後的補救教學應更有意義，也更能達到事半功倍之效。再者，診斷教學是融入於正規的教學中，教師不需要再找額外的時間進行，相信會有不少的第一線教師願意嘗試。只要教師能掌握診斷教學的內涵，應能協助學生改善迷思概念。在診斷教學過程中，針對同一問題，如班上同時出現若干答案，教師即可使用「一對多法」策略，透過學生間的質疑辯證，以製造認知衝突。當學生無法掌握小數的大小時，教師可使用「表徵法」策略，讓學生操作具體物，並從具體物的操作結果，來比較原來錯誤的答案，以產生認知衝突。當學生直接由符號的表面形式將小數與分數做轉換時，教師可使用「引入參考值法」策略，讓學生發現其轉換前後兩數與參考值的大小比較有出入，以製造認知衝突，如學生將 5.3 化成 $\frac{3}{5}$ 時，教師可取參考值爲「1」，使學生分別比較這兩個數和 1 的大小，而發現 $5.3>1$ 但 $\frac{3}{5}<1$。當學生所給的錯誤答案，可由另一新問題得到時，教師可使用「二對一法」策略，使學生回答此新問題而發現居然與原先舊問題答案一樣，或使用「反向法」策略，直接由學生的答案再反問回去，讓學生發現反回來的答案與原問題不符合。這兩種策略主要是以學生之矛攻其之盾，使學生對自己的答案產生疑惑。教師可視教學情況，交互使用，如學生將 0.9 化成 9 個 0.01 時，教師可用「二對一法」來問學生「0.09 是幾個 0.01？」或是用「反向法」來問學生「9 個 0.01 合起來是多少？」期使學生產生認知衝突。

然而診斷教學所強調的是教師在教學現場能立即診斷學生的迷思概念、立即製造認知衝突和立即調整學生認知，在在考驗著教師的臨場反應。從本研究所進行的診斷教學與教師在診斷教學中所遭遇的困難，透露出診斷教學對教師而言確實是一項挑戰。畢竟，教學現況是多變的，在有限的時間內，教師要掌握每一位學生的迷思概念並個個擊破，其實是相當困難的。尤其是當班上學生在同一概念下，產生不同的迷思概念時，教學者易聚焦於某一迷思概念的同時，而錯失了再針對其它迷思概念製造衝突的機會。以 T_{5b} 進行小數比大小教學爲例，雖然班上同時出現整數法則與分數法則的迷思概念，但 T_{5b} 僅對整數法則的學生製造認知衝突後，並隨即進行認知調整，而忽略了有「分數法則」迷思概念的學生。此外，具有同一個迷思概念的學生可能不止一人，教師也無法面面俱到，一一爲各人量身訂做能引起其認知衝突的策略，並在課堂上進行，以致認知衝

突的策略對某些學生而言可能會失效。以 T_{4a} 進行小數化分數教學爲例，T_{4a} 雖企圖以「表徵法」策略破除學生將 5.3 化爲 $\frac{3}{5}$ 的迷思概念，但由於學生缺乏表徵 $\frac{3}{5}$ 的先備知識，而出現同時以 3 條橘色積木和 5 個白色積木來表徵 5.3 和 $\frac{3}{5}$，因此表徵法策略失效。所幸 T_{4a} 能隨即改用引入參考值法策略再製造一次衝突，總算對某些學生奏效，但對另一些學生卻仍無起色。另外，教師面對學生所投的變化球，要能立即反應並順勢引導學生學習，也是一大考驗。以 T_{4a} 爲例，當學生質疑參考值 1 的使用性時，T_{4a} 不能彈性變化參考值大小，也進一步顯示了 T_{4a} 在進行診斷教學時的侷限性。總而言之，面對這麼多的狀況，教師難免會手忙腳亂或顧此失彼。哪個迷思概念先著手？或哪個學生先開始？如何兼顧所有的迷思概念和有迷思概念的所有學生？如何補齊學生的先備知識？以及如何選用適當的策略來製造認知衝突？這些狀況與困難皆爲師資培育者點出我們需要再努力的方向。最後，本研究所整理出有關學生的小數迷思概念、製造認知衝突的策略、調整認知的方法，皆可在師資培育課程和在職進修課程中，提出來與職前教師或在職教師討論，以充實他們的數學教學知能並進而提升其專業成長。

致　　謝

本研究承蒙國家科學委員會補助經費（計畫編號：NSC 91-2521-S-153-001），得以執行，謹致謝忱。

參考文獻

1. 艾如昀（1994）：**國小學生處理小數的歷程與困難**。嘉義縣：國立中正大學心理研究所碩士論文（未出版）。
2. 何明昇（1998）：**國中與國小學生體積概念之診斷與教學**。台北市：國立台灣師範大學化學研究所碩士論文（未出版）。
3. 吳昭容（1996）：**先前知識對國小學童小數概念學習之影響**。國立台灣大學心理學研究所博士論文。
4. 李源順（2002）：$0.\overline{9}$ 的診斷教學實驗。**科學教育研究與發展季刊**, **25**, 31-48。
5. 李源順和林福來（2000）：數學教師的專業成長：教學多元化。**師大學報：科學教育類**, **45**(1), 1-25。
6. 李源順和林福來（1998）：校內數學教師專業發展的互動模式。**師大學報：科學教育類**, **43**(2), 1-23。
7. 杜建台（1996）：**國小中高年級學童「小數概念」理解之研究**。台中市：國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文（未出版）。
8. 周筱亭（1990）：**電子計算器對於國民小學小數運算學習之影響**(I)。臺灣省國民學校教師研習會。
9. 林福來（1999）：數學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(3/3)。**行政院國家科學委員會專題研究計畫進度報告**。
10. 林福來、郭汾派和林光賢（1995）：比例推理的迷思概念診斷與補救。**科教研討會論文彙編**。
11. 林福來、黃敏晃和呂玉琴（1996）：分數啓蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊**, **4**(2), 161-196。
12. 教育部（2000）：**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。台北市：教育部。
13. 梁惠珍（2003）：**國小四年級小數診斷教學之研究**。屏東市：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。
14. 郭孟儒（2002）：**國小五年級學童小數迷思**

概念及其成因之研究。屏東市：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。

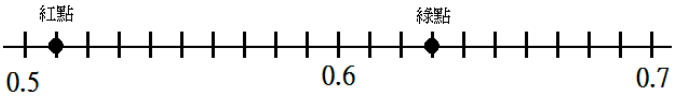
15. 陳文利（2001）：**國小四年級學童小數迷思概念之研究**。屏東市：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。
16. 陳永峰（1998）：**國小六年級學童小數知識之研究**。屏東市：國立屏東師範學院國民教育研究所碩士論文（未出版）。
17. 張春興（1989）：**張氏心理學辭典**。台北市：東華書局。
18. 黃瑞煥和詹馨（1982）：**低成就學生的診斷與輔導**。台中: 臺灣省政府教育廳。
19. 劉曼麗（1999）：小數認識與運算。**國民小學數學實踐課程總結性評量分析**（pp. 129-146）。教育部台灣省國民學校教師研習會。
20. 劉曼麗（2001）：國小學童的小數知識研究。屏東師院學報, **14**, 823-858。
21. 劉曼麗（2002）：台灣地區國小學童小數概念研究(II)：國小學童「小數與小數運算」概念之調查研究。**九十年度行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告**，國科會科學教育發展處。（NSC90-2521-S-153-003）。
22. 戴政吉（1999）：四年級學童的小數迷思概念~由學童習作所犯之錯誤談起。**國教天地**, **134**, 106-112。
23. 簡茂發和劉湘川（1993）：**八十一學年度國民教育階段學生基本學習成就評量國小組試題編製及抽測結果報告**。台中市：國立臺中師範學院。
24. Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Students in Mathematics*, *12*, 399-420.
25. Bell, A. W. (1989). *Teaching for the test. The Times Educational Supplement*. Outlines the Shell Centre's research into diagnostic teaching methods.
26. Bell, A. W. (1993). Diagnostic teaching. *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*, 19-34.
27. Bell, A. W. (1994). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 115-137.
28. Booth, L. R. (1984). Algebra: *Children's strategies and error*. Windsor, Berkshire, United Kingdom: NFER-Nelson.
29. Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S. Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). Decimals: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, *28*(8), 34-37.
30. Case, R. (1975). Gearing the demands of instruction to the developmental capacities of the learner. *Review of Educational Research 45*(1), 59-87.
31. Case, R. (1978). A developmentally based theory and technology of instruction. *Review of Educational Research 48*(3), 439-63.
32. D'Entremont, Y. M. (1991). *The reconstruction of decimal knowledge in young adult*. Unpublished doctoral dissertation University of Alberta, Edmonton, Alberta.
33. Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T., & Therlfall, J. (2002). *Learning to teach number. A handbook for students and teachers in the primary school*. Cheltenham, United Kingdom: Nelson Thornes Ltd.
34. Glasgow, R., Ragan, G., Fields, W. M., Reys, R., & Wasman, D. (2000). The decimal dilemma. *Teaching Children Mathematics*, *7*(2), 89-93.
35. Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45.

36. Hart, K. M. (1984). Ratio: *Children's strategies and errors*. Windsor, Berkshire, United Kingdom: NFER-Nelson.
37. Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: *The case of mathematics* (pp. 199-222). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
38. Hiebert, J., & Wearne, D. (1988). Instruction and Cognitive change in Mathematics. *Educational Psychologist*, *23*(2), 105-117.
39. Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, NJ: LEA.
40. Hiebert, J., & Wearne, D. (1983). *Students' conceptions of decimal numbers*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal. (ERIC Document Reproduction Service No. Ed 230415).
41. Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimal to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 399-420.
42. Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Number, operations, word problems. *Arithmetic Teacher*, *35*(8), 14-19.
43. Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1991). Students' understanding or the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(1), 3-11.
44. Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 313-335.
45. Onslow, B. (1986). *Overcoming conceptual obstacles concerning rates*. Shell Centre, University of Nottingham.
46. Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 8-27.
47. Sackur-Grisvard, C., & Le'onard, F. (1985). Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: *The order of positive decimal number*. *Cognition and Instruction*, *2*(2), 157-174.
48. Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation among students in Grades 5 to 10. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (pp. 548-555). Brisbane: Mathematics Education Research Group of Australia.
49. Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). *The intuitive rules theory and inservice teacher education* (pp. 205-225). Proceedings of the 1999 International Conference of Mathematics Teacher Education. Department of Mathematics National Taiwan Normal University. Taipei, Taiwan.

附錄　診斷迷思概念的融入方式

小數知識		迷思概念	佈題舉隅
記數系統知識	寫法	・將 0.08、0.09 的下一位寫成 0.010	・課本例題：（四年級）10 個 0.01 張百格板合起來和幾個 0.1 張一樣大？ ***引入關鍵問話***：10 個 0.01 張百格板合起來是幾張百格板？ 診斷迷思概念：寫成 0.010
	讀法	・將小數點後面的數讀成整數	・課本例題：（四年級）10 個 0.01 張百格板合起來和幾個 0.1 張一樣大？ ***引入關鍵問話***：10 個 0.01 張百格板合起來是幾張百格板？ 診斷迷思概念：讀成零點零＋張百格板 ・課本例題：（五年級）1 個蘋果重 0.359 公斤，在定位板上怎麼表示 0.359 公斤？（要求學生讀出 0.359） 直接診斷迷思概念：讀成零點三百五十九
	位值	・受整數位值的影響	・課本例題：（四年級）23 個 0.01 張百格板合起來和「2 個 0.1 張和 3 個 0.01 張合起來」一樣大。 ***引入關鍵問話***：23 個 0.01 張百格板合起來和 0.23 張百格板一樣大，「0.23」的 2 是記錄 2 個多少、3 是記錄 3 個多少？ 診斷迷思概念：出現錯誤的位值，如：2 個 10、3 個 1。 ・課本例題：（五年級）「0.278」中，2 表示什麼位？表示多少？7 表示什麼位？表示多少？8 表示什麼位？表示多少？ ***引入關鍵問話***：「0.278」的 2 表示多少？7 表示多少？8 表示多少？ 診斷迷思概念：出現錯誤的位值，如：2 個 100、7 個 10、8 個 1。
	位名	・受整數位名的影響	・課本例題：（四年級）23 個 0.01 張百格板合起來和「2 個 0.1 張、3 個 0.01 張合起來」一樣大。 ***引入關鍵問話***：記錄有幾個 1 的位置叫「個位」，那記錄有幾個「0.1」、「0.01」的位置應該要叫做什麼比較好？ 診斷迷思概念：出現下列錯誤的位名 十位 | 個位 | • | 個分位 | 十分位 千位 | 百位 | • | 十位 | 個位 個位 | 十位 | • | 百分位 | 千分位 ・課本例題：（五年級）1 個蘋果重 0.359 公斤，在定位板上怎麼表示 0.359 公斤？ ***引入關鍵問話***：「3」、「5」、「9」的位置分別叫做什麼？ 診斷迷思概念：出現下列錯誤的位名 個位 | • | 個分位 | 十分位 | 百分位 千位 | • | 百位 | 十位 | 個位 個位 | • | 十分位 | 百分位 | 千分位

小數知識		迷思概念	佈題舉隅
記數系統知識	化聚	• 直接移動小數點來決定化聚結果	• 課本例題：（四年級）54 個 0.01 張百格板合起來是多少張百格板？ ***引入關鍵問話***：54 個 0.1 張百格板合起來是多少張百格板？ 診斷迷思概念：54 個 0.1 張百格板合起來是 0. 54 張百格板。 • 課本例題：（五年級）美麗的小白板上的數合起來是多少（4 個 0.01 和 5 個 0.001 合起來是…）? 英俊的小白板上的數合起來是多少？(3 個 0.01 和 16 個 0.001 合起來是…） ***引入關鍵問話***：16 個 0.001 合起來是多少？ 診斷迷思概念：16 個 0.001 合起來是 0.16
運算規則知識	小數與分數的互換	• a.b 和 $\frac{b}{a}$或$\frac{a}{b}$相等	• 課本例題：（四年級）54 個 0.01 張百格板合起來是多少張百格板？ ***引入關鍵問話***：54 個白色積木用小數表示是幾條橘色積木？5.4 化成分數是多少？ 診斷迷思概念：$5.4 = \frac{4}{5}$或$\frac{5}{4}$
	比大小	• 整數法則 • 分數法則	• 課本例題：（四年級）有一塊正方形的花園，其中的 0.25 塊種菊花、0.5 塊種太陽花、0.05 塊種向日葵、0.20 塊種百合花，用不同顏色的筆在百格板上畫畫看。 ***引入關鍵問話***：種菊花和種太陽花的面積哪一個比較大？ 診斷迷思概念：0.25 > 0.5（整數法則） • 課本例題：(五年級)下面哪個物品最重？哪個物品最輕？(高麗菜 0.597 公斤、香瓜 0.6 公斤、木瓜 0.601 公斤) ***引入關鍵問話***：怎麼知道的？ 診斷迷思概念：0.601 > 0.597 > 0.6（整數法則） 0.6 > 0.601 > 0.597（分數法則）
	加減	• 直式算則時，將兩數向右對齊後計算	• 課本例題：（四年級）媽媽將紅豆 0.6 公斤和砂糖 0.57 公斤做成豆沙，這兩種原料共重幾公斤？ 直接診斷迷思概念：出現向右對齊的直式紀錄，如： $\begin{array}{r} 0.6 \\ +0.57 \\ \hline 0.63 \end{array}$ • 課本例題：（五年級）在兩個 1 公升的容器裡裝水，一個裝 0.118 公升，另一個裝 0.23 公升，兩個容器共裝多少公升的水？ 直接診斷迷思概念：出現向右對齊的直式紀錄，如： $\begin{array}{r} 0.118 \\ -0.\ \ 23 \\ \hline 0.\ \ 95 \end{array}$

小數知識		迷思概念	佈題舉隅
數量表示知識	圖像表徵	・將被十等分的單位視爲 1	・課本例題：（五年級）下圖是 0.5 和 0.7 的數線放大圖，數線上的紅點和綠點表示的數各是多少？  直接診斷迷思概念：紅點：0.1、綠點：0.13
	單複名數轉換	・將小數點做爲大單位與小單位的區隔	・課本例題：（四年級）比比看，誰跳得最遠？（小琪：1.28 公尺、小美：1 公尺 9 公分、小傑：0.9 公尺、小立：1 公尺 30 公分） ***引入關鍵問話***：小美跳 1 公尺 9 公分，也可以說是幾公尺？ 診斷迷思概念：1 公尺 9 公分＝1.9 公尺 ***引入關鍵問話***：小傑跳 0.9 公尺，也可以說是幾公分？ 診斷迷思概念：0.9 公尺＝9 公分 ・課本例題：（五年級）60 公尺是幾公里？用小數怎麼表示？ 直接診斷迷思概念：60 公尺是 0.60 公里

A Study for Diagnostic Teaching on Decimals

Man-Li Liu
Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Pingtung Teachers College

Abstract

The main purpose of this study was to explore the process of diagnostic teaching on decimals and the effects on students' misconceptions. Subjects were 98 students in grades 4 and 5 from four classes in four elementary schools from south Taiwan. Data were collected from written tests, videotapes of teaching, and interviews. Data analysis was conducted using both quantitative and qualitative aspects. During the process of diagnostic teaching, (a) seven misconceptions for fourth graders and three misconceptions for fifth graders were diagnosed, (b) five strategies of provoking cognitive conflict were implemented, two-to-one, reverses, one-to-many, using referents, and representations, and (c) four ways of clarifying misconceptions were used, manipulating concretes, connecting pure decimals and fractions, dividing into equal parts and using a notation system. In addition, the main results indicate that (a) diagnostic teaching can raise and retain the results of students' performance on decimals, and (b) diagnostic teaching can overcome students' misconceptions of decimals.

Key words: Diagnostic Teaching, Decimals.