

# 適用於擬動態試驗之具數值消散 特性的外顯式積分法

張順益<sup>1</sup>

關鍵詞： 數值消散、外顯式積分法、擬動態試驗。

## 摘要

使用具有數值消散特性的逐步積分法已被認為是擬動態試驗上克服因高頻振態所引起誤差累積傳播效應的有效方式，然而，現今具有數值消散特性的逐步積分法幾乎都是內隱式積分法，而內隱式積分法在擬動態試驗上的應用較為繁複且不易，因而較少被採用。本文將詳細推導現今唯一具有數值消散特性且仍保有二階精確度的外顯式積分法。此積分法非常適用於擬動態試驗上，用以克服試驗時由於數值誤差或試驗誤差所引起不正確的高頻振態反應。為了突顯該積分法的數值消散特性，Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法亦作比較研究。這些比較將包括數值阻尼比，相對週期誤差以及頻譜半徑隨時間步長與自然週期之乘積而改變的情形。最後應用此積分法完成兩個數值釋例。

## A FAMILY OF DISSIPATIVE EXPLICIT METHODS FOR PSEUDODYNAMIC TESTING

Shuenn-Yih Chang

National Center for Research on Earthquake Engineering  
200, Sec. 3, Hsinhai Road,  
Taipei, Taiwan 106, R.O.C.

Key Words: numerical dissipation, explicit method, pseudodynamic test.

## ABSTRACT

It has been recognized that numerical dissipation is an effective way for suppressing the spurious high-frequency modes. However, most dissipative integration methods are implicit algorithms for which the implementation for application to pseudodynamic tests appears to be more complicated than the explicit ones. A family of dissipative explicit methods is proposed herein, which possesses the same second-order accuracy as the basic property for the commonly used integration methods. These methods are suitable for pseudodynamic tests due to existence of numerical dissipation for eliminating the spurious high-frequency response. For comparison, the Newmark explicit method with  $\gamma$ -dissipation is also investigated. Factors investigated include the variations of numerical damping ratio, relative period error and spectral radius with respect to the product of the natural frequency and the size of time step. Two numerical examples are provided to demonstrate the effect of numerical dissipation using the proposed algorithms.

<sup>1</sup> 國家地震工程研究中心副研究員



## 一、前 言

利用有限元素法將結構物離散化後，所得到的控制方程式將會衍生出某些高頻振態，而這些高頻振態往往並不代表該結構物的真正行為。除此之外，進行逐步積分時所產生的數值誤差也可能引起不正確的高頻振態反應，嚴重時，甚至會發生數值爆炸的現象。這裡所提到的數值誤差可能是由於差分方程式僅能提供近似的解所產生，也可能是由結構的非線性行為所引起。在擬動態試驗上，因實驗誤差而導致不正確的高頻振態反應尤其嚴重，此乃因實驗誤差遠遠大於數值誤差之故 [1]。因此一個理想的逐步積分法應當可以抑制甚或是去除掉不正確的高頻振態反應，而同時能準確地對低頻振態反應積分。很自然地，我們會想到利用黏性阻尼來達到此一目的，然而，此一方法已被證明是無效的。首先是 Hilber 等人 [2,3] 證明出：“對於一線性系統，黏性阻尼並無法達到抑制或消除高頻振態反應的目的”；而 Shing 和 Mahin [4] 則更進一步的指出：“對於任一非線性系統，如果其黏性阻尼是根據起始彈性結構性質所求得的，當結構物降伏時，可能會導致不正確的結果”。

有不少的逐步積分法是具有數值消散特性的，這些特性隨著積分法的不同而改變，而大部份的積分法其數值消散則往往隨自然頻率而改變。具有數值消散特性的逐步積分法大部份都是內隱式的，諸如 Wilson-θ 積分法 [5,6]、Houbolt 積分法 [7]、Newmark 積分法 [6,8] 以及 α-消散積分法 [3,9]。而幾乎所有的外顯式積分法都不具數值消散特性，例如，習用的中央差分法就不具任何阻尼特性。雖然只要選用  $\gamma > \frac{1}{2}$ ，Newmark 外顯式積分法就可引入數值阻尼，然而此時的低頻振態反應將會被過度的降低而無法得到可靠的解。事實上，此積分法只具有一階的精確度而已，因而其實用價值並不高。為此 Shing 和 Mahin 也曾發展出一修正的 Newmark 外顯式積分法 [4]，此積分法雖可改善最低頻振態不被過度消散的缺點，然而對於其它的低頻振態則仍無改善，甚且還會引發負阻尼現象，而穩定條件則變為更加複雜化，因此其應用相當有限而且非常不便。

在擬動態試驗的發展過程中，內隱式積分法在初期咸被認為並不適用，因為內隱式積分法往往需要利用疊代的程序來求解，然而非線性結構的行為是具有路徑相依的特性，並不允許疊代。此一困難如今已被適度的克服，因而開發出幾種不同的試驗方法 [10~14]，但是此試驗方法在軟、硬體的配合都較為複雜及困難。因此，外顯式積分法仍是擬動態試驗上廣為採用的方式。

本論文中所開發成功的外顯式積分法不但具有理想的數值消散特性，並且仍保有現今所有慣用之逐步積分法所具備的二階精確度的特性。這一族的積分法和 Newmark 外顯式積分法非常相似，只是將其中原本是常數係數的 γ 值改變成矩陣的型式，而且是勁度矩陣、質量矩陣的倒數以及時間步長的函數。

## 二、逐步積分法之特性分析

在進行結構動力分析時，往往先將結構物利用有限元素

法適度的離散化，並據予列出運動方程式。對於一多自由度系統，其運動方程式一般可用下列的矩陣型式表示之：

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (1)$$

式中  $M$ 、 $C$  和  $K$  分別代表質量矩陣、阻尼矩陣及勁度矩陣；而位移向量、速度向量及加速度向量則分別以  $u$ 、 $\dot{u}$  和  $\ddot{u}$  表示之； $f$  則是外作用力向量。

在以下的詳細分析中，將只針對一線性的單自由度系統進行相關公式的推演，然而此結論仍可應用到多自由度線性系統。此乃因任一多自由度線性系統可利用振態疊加法 [15] 轉換成某些線性單自由度系統的組合。在此我們將以廣泛被採用的 Newmark 積分法來做為求解運動方程式(1)的逐步積分法，並根據此方法來推演一族新的外顯式積分法，其一般公式通常可表示如下：

$$\begin{aligned} m a_{n+1} + c v_{n+1} + k d_{n+1} &= f_{n+1} \\ d_{n+1} &= d_n + (\Delta t) v_n + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_n + \beta a_{n+1} \right] \\ v_{n+1} &= v_n + (\Delta t) \left[ (1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $m$  代表質量、 $c$  代表阻尼、 $k$  代表勁度，而  $f_{n+1}$  則代表外作用力的大小；至於  $d_{n+1}$ 、 $v_{n+1}$  和  $a_{n+1}$  則是位移、速度及加速度在第  $n + 1$  步的近似解。這一族逐步積分法的數值消散特性、穩定性及精確度完全由參數  $\beta$  及  $\gamma$  所控制。當  $\beta = 0$  時，此族積分法就退化成習用的 Newmark 外顯式積分法。在 Newmark 的外顯式積分法中，如  $\gamma = \frac{1}{2}$ ，則其為一能量守恆的積分法，亦即不具有數值消散特性的積分法；而當  $\gamma > \frac{1}{2}$ ，則該積分法將會呈現數值消散的特性，此類型積分法也就是所謂的 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法 (Newmark explicit method with  $\gamma$ -dissipation)。

### 2.1 穩定性和精確度

在無黏性阻尼作用的自由振動下，Newmark 積分法可以利用下列的遞迴矩陣型式表示之：

$$X_{n+1} = A X_n = A^{n+1} X_0 \quad (3)$$

其中  $X_n = [d_n, (\Delta t)v_n, (\Delta t)^2 a_n]^T$ ， $X_0$  為起始向量，而  $A$  則代表擴大矩陣，可表示如下：

$$A = \left( \frac{1}{D} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma \Omega^2 & 1 - (\gamma - \beta) \Omega^2 & (1 - \gamma) - \left( \frac{1}{2} \gamma - \beta \right) \Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & -\left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$D = 1 + \beta \Omega^2 \quad (5)$$

和

$$\Omega = \omega (\Delta t) \quad (6)$$



而

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (7)$$

擴大矩陣  $\mathbf{A}$  的特徵方程式可推得為：

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 = 0 \quad (8)$$

其中  $\lambda$  是擴大矩陣  $\mathbf{A}$  的一個固有值， $\mathbf{I}$  代表單位矩陣，至於  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$  則可以表示如下：

$$A_1 = \frac{1}{D} \left\{ 2 + \left[ 2\beta - \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \Omega^2 \right] \right\}$$

$$A_2 = \frac{1}{D} \left[ 1 + \left( \beta - \gamma + \frac{1}{2} \right) \Omega^2 \right] \quad (9)$$

$$A_3 = 0$$

假如擴大矩陣  $\mathbf{A}$  存在有三個不同的固有值  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$ ，則矩陣  $\mathbf{A}''$  將可被轉換成如下之對角矩陣：

$$\Lambda'' = \Phi^{-1} \mathbf{A}'' \Phi \quad (10)$$

其中  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  和  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 。向量  $\phi_j$  代表相對應於固有值  $\lambda_j$  的固有向量。從式(10)可求得自由振動反應的數值解如下：

$$d_n = p_1 (\lambda_1)'' + p_2 (\lambda_2)'' + p_3 (\lambda_3)'' \quad (11)$$

式中  $d_n$  代表第  $n$  步的位移並且是向量  $\mathbf{X}_n$  中的第一個元素，而  $p_1$ 、 $p_2$  和  $p_3$  則是由起始條件所決定的常數。從穩定條件可以得知此三個固有值  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  必須小於或等於 1，以便能得到具有指數退化或上下振動現象的收斂解。如果我們只希望解得具有上下振動的收斂解，則其中的兩個固有值必須是共軛複數，而且其絕對值大小必須小於或等於 1，亦即：

$$|\lambda_3| \leq |\lambda_{1,2}| \leq 1 \quad (12)$$

至於第三個固有值  $\lambda_3$  則是一個假根，並不代表自由振動的一個真正解。因此，在滿足穩定條件的前提下，我們可以將固有值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  表示如下：

$$\lambda_{1,2} = U \pm iV = e^{-\xi \bar{\Omega} \pm i\bar{\Omega}_D} \quad (13)$$

其中， $i = \sqrt{-1}$ ， $\bar{\Omega} = \bar{\omega}(\Delta t)$  和  $\bar{\Omega}_D = \bar{\Omega}\sqrt{1-\xi^2}$ ；而  $U$  和  $V$  均為實數並且滿足  $U^2 + V^2 \leq 1$ 。符號  $\xi$  代表黏滯性阻尼比，而  $\bar{\omega}$  則是經由數值方法所衍生出的自然頻率。

為了方便探討逐步積分法的數值特性，其頻譜半徑、相差角以及數值阻尼比則分別定義如下：

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_j| \quad j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

$$\bar{\Omega}_D = \tan^{-1} \left( \frac{V}{U} \right) \quad (15)$$

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln(U^2 + V^2)}{2\bar{\Omega}} \quad (16)$$

另外，尚有一個非常重要的指標，用以表示逐步積分法的精確度，一般稱之為相對週期誤差，其定義如下：

$$\frac{T - \bar{T}}{T} = 1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (17)$$

其中

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \quad (18)$$

由前面  $\bar{\omega}$  的定義，可同樣進一步的定義  $\bar{T}$  是經由數值方法所衍生出的週期。如果我們將式(13)代入式(11)，可以得到以下的數值解：

$$d_n = e^{-\bar{\xi} \bar{\omega} n(\Delta t)} [C_1 \cos(\bar{\omega}_D n \Delta t) + C_2 \sin(\bar{\omega}_D n \Delta t)] + C_3 (\lambda_3)^n \quad (19)$$

另外，此具黏性阻尼的單自由度振動系統亦可毫無困難地經由理論方法 [15] 推導出其解為：

$$d(t) = e^{-\xi \omega_D t} [C_1^* \cos(\omega_D t) + C_2^* \sin(\omega_D t)] \quad (20)$$

式中  $\xi$  是黏性阻尼比，而  $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  則是具有阻尼的自然振動頻率。比較式(19)和式(20)，我們發現在觀念上可以將數值解中的  $\bar{\xi}$  和  $\bar{\omega}$  視為是  $\xi$  和  $\omega$  在理論解中的相對應量。

## 2.2 局部截斷誤差

局部截斷誤差 [6] 被定義成將差分方程式代入其所相對應的微分方程式中所產生的誤差，因此有必要在此說明此兩方程式。由式(1)可以推得不受外力作用的單自由度微分方程式如下：

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (21)$$

而其相對應的差分方程式則可由式(3)消去速度和加速度取得為：

$$d_{n+1} - A_1 d_n + A_2 d_{n-1} - A_3 d_{n-2} = 0 \quad (22)$$

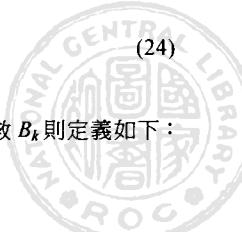
因此，局部截斷誤差可以表示如下：

$$E = \frac{1}{(\Delta t)^2} [u(t + \Delta t) - A_1 u(t) + A_2 u(t - \Delta t) - A_3 u(t - 2\Delta t)] \quad (23)$$

假如  $u(t)$  是一個連續而且可以任意多次微分的函數，則利用 Taylor 展開式，我們可以得到：

$$E = \sum_{k=0}^n B_k u^{(k)} (\Delta t)^{k-2} + O[(\Delta t)^{k-2}] \quad (24)$$

其中  $u^{(k)}$  表示是  $u(t)$  的第  $k$  次微分，而係數  $B_k$  則定義如下：



$$B_0 = 1 - A_1 + A_2 - A_3$$

$$B_k = \frac{1 + (-1)^k A_2 - (-2)^k A_3}{k!} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

在式(24)中，所有大於或等於二階的微分項均可利用式(21)而轉換成只用  $u$  和  $\dot{u}$  來表示。在  $k = 4$  而且不具黏性阻尼的情形下，則式(22)變成：

$$E = \frac{\omega \Omega \dot{u}}{D} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 \Omega^2 u}{D} \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) - \beta + \frac{1}{12} \right] \quad (26)$$

而當

$$E = O[(\Delta t)^z] \quad z > 0 \quad (27)$$

時，此差分方程式就被稱為和原微分方程式具有一致性； $z$  則代表精確度的階數或收斂的速率。很顯然地，一致性隱含著當時間步長  $\Delta t$  趨近於零時，局部截斷誤差  $E$  就逼近於零；而精確度的階數則代表當時間步長  $\Delta t$  趨近於零時，局部截斷誤差  $E$  逼近於零的速度。

### 三、外顯式積分法的推導

本節將詳細推導一族具有數值阻尼的外顯式積分法，由於係屬於外顯式，因此就必須先滿足  $\beta = 0$  的要求。而從式(26)可知，如欲成為至少具有二階精確度的積分法，則  $\gamma - \frac{1}{2}$  必須等於零或是為  $\Omega^m$  的函數，其中  $m \geq 2$ 。基於以上的要求，可以先考慮  $\beta = 0$  的情況。如此一來，式(4)和(9)即簡化成：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\gamma \Omega^2 & 1 - \gamma \Omega^2 & (1 - \gamma) - \frac{1}{2} \gamma \Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & -\frac{1}{2} \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

和

$$A_1 = 2 - (\gamma + \frac{1}{2}) \Omega^2$$

$$A_2 = 1 - (\gamma - \frac{1}{2}) \Omega^2 \quad (29)$$

$$A_3 = 0$$

而此時的式(8)亦退化成：

$$\lambda(\lambda^2 - A_1\lambda + A_2) = 0 \quad (30)$$

由此式可解得擴大矩陣  $\mathbf{A}$  的三個固有值為：

$$\lambda_{1,2} = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \Omega^2 \right] \pm i \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \Omega^2} \quad (31)$$

$$\lambda_3 = 0$$

上式之第一個方程式可寫成如式(13)的型式，其中  $U$  和  $V$  則分別為：

$$U = 1 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \Omega^2$$

$$V = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \Omega^2} \quad (32)$$

如果穩定條件的要求是希望得到只具有上下振動的數值解，而不包括指數退化的數值解，則利用式(12)可推得下列兩不等式：

$$-\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{2}{\Omega} - \frac{1}{2} \quad (33)$$

和

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\Omega^2} \quad (34)$$

此兩不等式的交集即為此積分法的穩定範圍。為了容易清楚看出此兩不等式所涵蓋的範圍，特別將此兩不等式繪於圖 1。我們可以清楚的發現在穩定範圍  $0 \leq \Omega \leq 2$  內，此兩不等式可進一步合併成下式：

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{2}{\Omega} - \frac{1}{2} \quad (35)$$

值得注意的是，當  $\gamma = \frac{1}{2}$  時，該積分法具有最大的穩定範圍  $0 \leq \Omega \leq 2$ 。

假如能夠適當的選擇  $\gamma$  去滿足式(35)的要求，此時即可獲得有利於逐步積分的數值消散特性。從觀察現今被採用的逐步積分法 [2,3,5~9,15]，可以發現數值阻尼比  $\xi$  和相對週期誤差  $(T - \bar{T})/T$  乃是  $\Omega$  的函數，亦即：

$$\xi = F(\Omega) \quad (36)$$

$$\frac{T - \bar{T}}{T} = G(\Omega) \quad (37)$$

而式(37)更可以另外表示成：

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{1 - G(\Omega)} \quad (38)$$

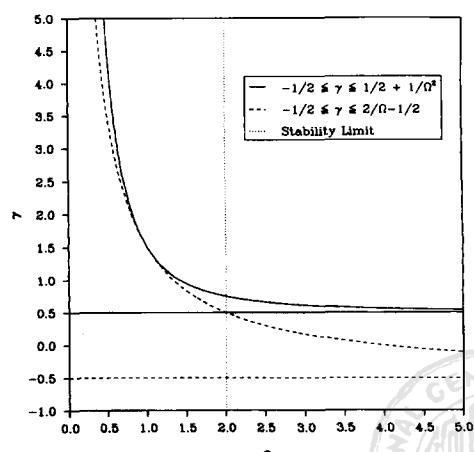


圖 1 滿足穩定條件之  $\gamma$  值範圍

將式(32)、(36)和(38)代入式(16)，可以得到：

$$\gamma = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{\Omega^2} \right) \left\{ 1 - e^{-\left[ \frac{2\Omega F(\Omega)}{1-G(\Omega)} \right]} \right\} \quad (39)$$

當然，式中的函數  $F(\Omega)$  和  $G(\Omega)$  必須適當的選取，以滿足式(35)的要求。

進一步觀察現有的逐步積分法更可以發現如欲獲得具有理想的數值阻尼特性，則  $F(\Omega)$  和  $G(\Omega)$  必須是  $\Omega$  的遞增函數。此乃因我們希望在  $\Omega$  很小的時候，幾乎沒有任何的數值阻尼與週期誤差；而隨著  $\Omega$  的慢慢增大，希望數值阻尼也跟著一起慢慢增大。當然，數值阻尼的慢慢增大也伴隨著週期誤差的慢慢增大。因此我們可以簡單的假設  $F(\Omega)$  和  $G(\Omega)$  是多項式的遞增函數：

$$F(\Omega) = a \Omega^b \quad (40)$$

$$G(\Omega) = c \Omega^d \quad (41)$$

式中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  是經由適當選取的正值常數，而其中  $b$  和  $d$  必須大於 1，以便能代表一遞增函數並且其斜率亦是遞增的。是以此積分法的  $\bar{\Omega}$  和  $\bar{\xi}$  可以由式(15)和(16)得到為：

$$\bar{\Omega}_D = \tan^{-1} \left[ \frac{\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{4})^2 \Omega^2}}{1 - \frac{1}{2} (\gamma + \frac{1}{2}) \Omega^2} \right] \quad (42)$$

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln \left[ 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \Omega^2 \right]}{2\bar{\Omega}} \quad (43)$$

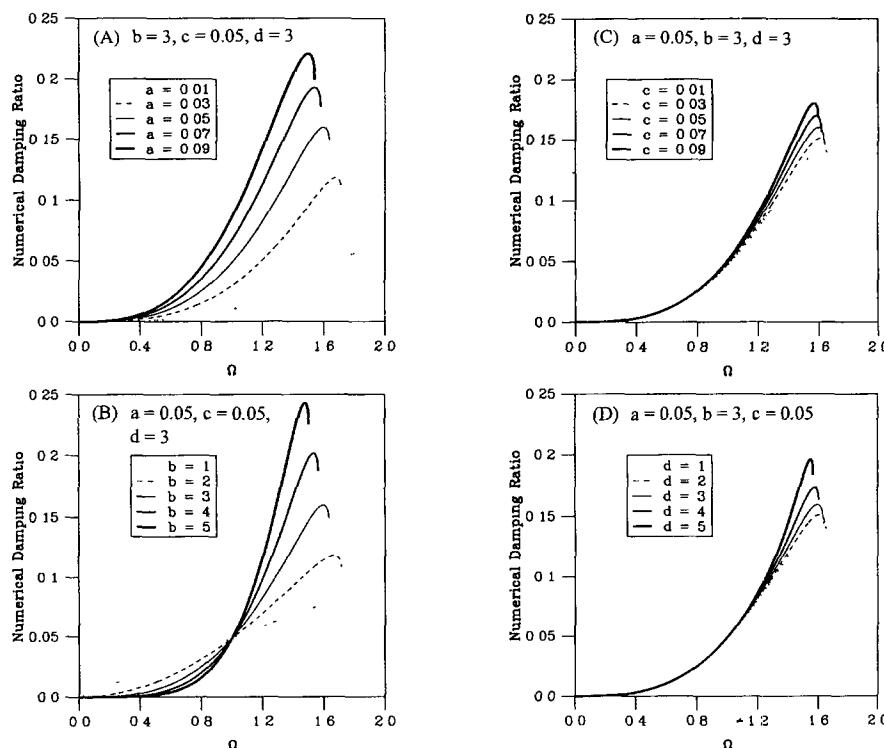


圖 2 數值阻尼比隨  $\Omega$  而改變之參數變異性分析

很自然地，我們將預期這兩個函數和原先假定的函數並不相同，因為函數  $F(\Omega)$  和  $G(\Omega)$  是相互有關連的，而我們卻反而獨立的選定。

關於係數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  的效應可經由一系列的參數研究而得知，其結果繪於圖 2。此參數效應的研究，係以  $a=c=0.05$  和  $b=d=3$  當做是基本的狀況，蓋因其可提供適度的數值阻尼，並且其阻尼比大小和自然頻率成正比。至於其它各種不同狀況的模擬，則是將其中的某三個參數固定而只允許剩餘的一個參數加以改變，圖 2(a) 到圖 2(d) 分別繪出數值阻尼隨  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  而改變的情形。所有的數值阻尼曲線皆經過原點，而後隨著  $\Omega$  的增加而漸漸的增加。這個特性暗示著可以有效的抑制或消除高頻振態的不正確反應，而不影響低頻振態的反應，也就是逐步積分法中所希望擁有的數值阻尼特性。

比較圖 2(a) 和圖 2(c) 以及圖 2(b) 和圖 2(d)，我們可以發現參數  $a$  和  $b$  的改變，亦即函數  $F(\Omega)$ ，對於數值阻尼具有較大的影響；相對地，參數  $c$  和  $d$  的改變，亦即函數  $G(\Omega)$ ，對於數值阻尼的影響則較小。圖 2(a) 清楚地指出數值阻尼曲線隨  $a$  值的增加而向上移動，並且都可獲得所希望的數值特性。從圖 2(b) 中，可看出當  $0 \leq \Omega \leq 1$  時，數值阻尼曲線隨  $b$  從 1 增加到 5 而漸漸地往下移動；在另一方面，當  $\Omega$  介於 1 和穩定條件的最大上限值時，曲線則隨著  $b$  由 1 增加到 5 時，而逐漸向上移動。此圖似乎隱含著當  $b \geq 3$  時，可獲得理想的數值消散特性。從圖 2(c) 和圖 2(d) 中可以獲知  $c$  和  $d$  對數值消散特性的影響非常輕微，尤其是在  $0 \leq \Omega \leq 1$  的範圍內。事實上，在此範圍內，我們甚至於可以視數值阻尼完全獨立於函數  $G(\Omega)$ 。



由於數值阻尼的大小受函數  $G(\Omega)$  的影響非常小，因此為了簡單起見，可假定  $G(\Omega)=0$ 。此時式(39)變成：

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Omega^2} \left( 1 - e^{-2\alpha\Omega^{b+1}} \right) \quad (44)$$

此式可利用 Taylor 展開式轉換成一個簡單的多項式函數如下：

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \frac{(2\alpha)^n}{n!} \right] \Omega^{n(b+1)-2} \quad (45)$$

如果式中  $\Omega$  的次數為偶數，也就是  $b$  為奇數，則從式(6)和(7)知  $\Omega$  可以質量  $m$ 、勁度  $k$  以及時間步長  $\Delta t$  來表示，這是一個非常有效的表示法，因為這可避免了繁雜的固有值求解問題。對於單自由度系統，固有值的求解問題並不困難，然而對於多自由度系統的高階固有值求解問題則是一件非常費時的工作。因此只要選擇指數  $b$  為奇數即可輕易地達到上述之目的。假如令  $b=3$ ，我們可得到：

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \Omega^{4n-2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \left[ \frac{k}{m} (\Delta t)^2 \right]^{2n-1} \quad (46)$$

其中

$$a_n = \frac{(2\alpha)^n}{n!} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

此式已完全由結構性質和時間步長來表示，而不再是以  $\Omega$  的型式表示。當然，也省去了固有值求解的難題。

#### 四、積分法之比較

我們將以下面的例子來展示此新開發積分法所具備的數值阻尼特性，在此僅用式(46)的前兩項做為係數  $\gamma$ ，亦即該積分法的相關係數為：

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \frac{1}{2} + a \left( \frac{k}{m} \right) (\Delta t)^2 \quad (48)$$

而為了比較之目的，Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法也將在此一併探討，其數值消散特性亦可由式(42)和(43)表示之。此新發展外顯式積分法的三個不同  $a$  值以及 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法的三個不同  $\gamma$  值，將用以顯示該積分法的數值阻尼消散特性。這些  $a$  和  $\gamma$  值的選定是希望使此兩種積分法具有大致相同的最大數值阻尼比。

關於這兩種積分法其數值阻尼特性的比較，可在圖 3 中看出。對此兩種積分法而言，數值阻尼曲線都由其係數  $a$  或  $\gamma$  所控制，並且可成連續性的變化。此新發展的外顯式積分法更可提供相當理想的數值阻尼特性。因為此積分法的數值阻尼曲線通過原點，然後，隨著自然頻率的增加，其數值阻尼亦漸漸的增加。雖然 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法的數值阻

尼曲線亦通過原點，然而其阻尼比和自然頻率幾乎成線性的關係，這將導致某些低頻振態反應的過度消散，進而失去其正確性。也因此 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法無法提供理想中的數值阻尼特性。

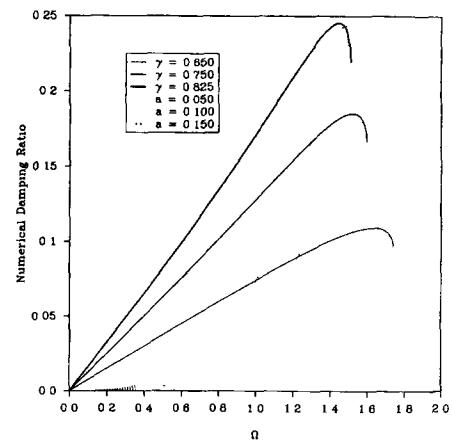


圖 3 數值阻尼比隨  $\Omega$  而改變之特性曲線

對於此兩種不同的外顯式積分法，其局部截斷誤差皆可從式(26)求出，只須將相關的係數代入即可，對於這一族新發展的外顯式積分法，其局部截斷誤差為：

$$E = \frac{1}{12} \omega^2 \Omega^2 u \quad (49)$$

而對於 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法則為：

$$E = \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \omega \Omega \dot{u} \quad (50)$$

由此可很清楚的得知，當  $\gamma > \frac{1}{2}$  時，Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法僅具有一階的精確度，雖然  $\gamma = \frac{1}{2}$  時，將具有二階的精確度，但此時則不具備數值消散特性。這個結論可從圖 4 中得到完全的驗證，新發展的積分法其相對週期誤差皆小於與其相對應由 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法所產生者。

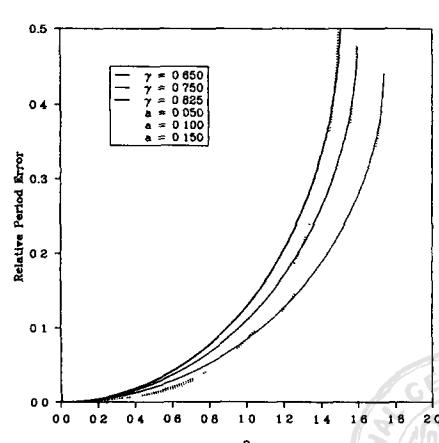
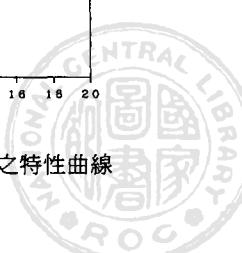


圖 4 相對週期誤差隨  $\Omega$  而改變之特性曲線



關於頻譜半徑隨  $\Omega$  的變化情形可從圖 5 中看出，此圖亦可以得知此新開發的外顯式逐步積分法在提供數值阻尼的特性遠優於 Newmark 外顯式  $\gamma$ -消散法。圖中各平滑曲線的急遽轉折點乃是對應於當固有值由兩共軛複數根變成兩個相異實根的轉折點。

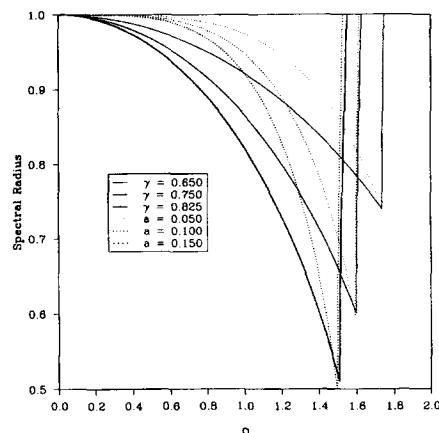


圖 5 頻譜半徑隨  $\Omega$  而改變之特性曲線

式(46)中的高階項亦可用來產生理想的數值阻尼特性。特別值得注意的是式中的常數係數並不需要滿足式(47)的要求，此乃因函數  $F(\Omega)$  是可以任意選定。假如我們只取其中的前三項，可以得到下列的式子：

$$\gamma = \frac{1}{2} + a_1 \left( \frac{k}{m} \right) (\Delta t)^2 + a_2 \left( \frac{k}{m} \right)^2 (\Delta t)^4 \quad (51)$$

其所對應逐步積分法的數值阻尼特性示於圖 6。在此圖中，當  $a_1 = 0.2$  時，對某一固定的  $\Omega$  而言，數值阻尼隨著  $a_2$  的增加而變大。很顯然地，還有無限多的組合可以得到上述的理想數值消散特性，但對一般而言，式(46)中的前兩、三項已足夠一般應用上的需要。事實上，選用的項數越多只會增加額外的計算量並沒有什麼其它明顯的優點。

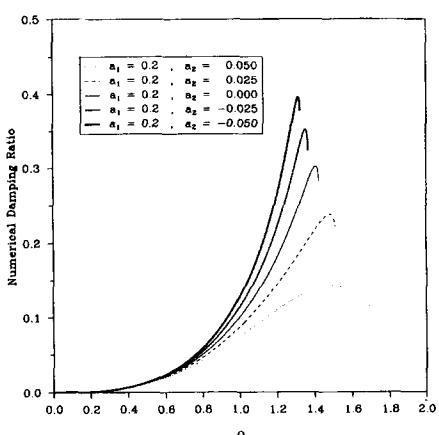


圖 6 新開發外顯式積分法之數值阻尼比隨  $\Omega$  而改變之特性曲線

## 五、多自由度系統的公式

已推導出的外顯式積分法可更進一步的應用到多自由度系統，而僅需稍加修正即可，其一般式可表示如下：

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + (\Delta t) \mathbf{v}_n + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B} \right) \mathbf{a}_n + \mathbf{B} \mathbf{a}_{n+1} \right] \quad (52)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (\Delta t) \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{a}_n + \mathbf{G} \mathbf{a}_{n+1} \right]$$

式中  $\mathbf{I}$  是單位矩陣； $\mathbf{f}_{n+1}$ 、 $\mathbf{d}_{n+1}$ 、 $\mathbf{v}_{n+1}$  和  $\mathbf{a}_{n+1}$  則是第  $n+1$  步的外作用力向量、位移向量、速度向量以及加速度向量；而  $\mathbf{B}$  及  $\mathbf{G}$  則為決定數值積分特性的係數矩陣。對此新開發的外顯式積分法而言，其係數矩陣為：

$$\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(\Delta t)^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1}]^n \quad (53)$$

其中  $a_n$  是適當選取的常數。此族的積分法將會非常適用於擬動態試驗上而只須將控制方程式轉換成下式即可：

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (54)$$

其中  $\mathbf{r}_{n+1}$  代表回復力向量的大小。在此需特別注意的是在計算係數矩陣時所用的勁度矩陣是結構的起始彈性勁度矩陣，並且在整個試驗的過程中此係數矩陣並不因材料的降伏而改變，此乃因在擬動態試驗的過程中，我們並不知道結構物的勁度矩陣。其進行擬動態試驗的步驟如下：

- (1) 利用式(52)中的第二式計算下一步的位移增量。
- (2) 利用油壓式千斤頂將試體移動步驟(1)計算所得的位移增量。
- (3) 當試體移到目標位置後，隨即量測回復力。
- (4) 計算加速度及速度。
- (5) 重覆上述步驟。

很顯然地，此新開發的外顯式積分法與 Newmark 的外顯式積分法其主要差異乃在於係數的不同。Newmark 外顯式積分法的係數是某一選定的常數，而新開發的外顯式積分法其係數是矩陣型式，並且是  $\mathbf{M}^{-1}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\Delta t$  的函數。

## 六、數值釋例

### 6.1 釋例一

一個具有兩個自由度的線彈性剪力梁式的兩層樓結構物將被用來突顯數值阻尼的效應。這一個不尋常的結構物是特別設計成具有一個非常大的高頻振態，以便能彰顯數值消散的特性。此兩層樓建築物之第一、二層集中載重分別為  $m_1 = 1 \text{ kg}$  和  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ，而其相對應的勁度則為  $k_1 = 20000 \text{ N/m}$  和  $k_2 = 100 \text{ N/m}$ 。自然頻率經算得為  $9.975 \text{ rad/sec}$  和  $141.776 \text{ rad/sec}$  而其相對應的振態矩陣則為：



$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.00500 & 0.99999 \\ 0.99999 & -0.00500 \end{bmatrix} \quad (55)$$

其中每一欄即代表其所相對應的振態。每一振態的正規化係數依據  $\|\phi\| = \sqrt{(\phi^T \phi)} = 1$  來進行的。

圖 7 指出新開發的外顯式積分法可以有效的消除第二振態的反應。圖中的虛線代表該結構物受到此起始位移  $d_0 = (0.00500, 0.99999)^T$  的自由振動反應，該起始位移僅由第一振態所組成。其餘的曲線則是該結構物受到起始位移  $d_0 = (100.00500, 0.49999)^T$  的自由振動反應。這個起始位移是由第一振態加上一百倍的第二振態所組成。所有的數值解都可由新開發的外顯式積分法所求得，值得注意的是，當選擇  $a = 0$  時，則此新開發的外顯式積分法就變成 Newmark 的外顯式積分法 ( $\gamma = 0.5$ )。積分所採用的時間步長均為 0.01 秒。從此圖中，我們可清楚的得知新開發的外顯式積分法 ( $a = 0.05$  或  $a = 0.10$ ) 可以很快地將第二振態反應去除掉，而僅留下第一振態的反應；相反地，Newmark 外顯式積分法並無法消除第二振態反應，而因係屬能量守恆的積分法，故仍完全保有第二振態的反應。當時間步長為 0.01 秒時，相對於自然頻率 9.975 rad/sec 和 141.776 rad/sec 的  $\Omega$  分別為 0.09975 和 1.41776，其所對應的數值阻尼比則為 0.0041 和 0.23。這是指對應於新開發的外顯式積分法當  $a = 0.1$  時的情形而言。同樣地，當  $a = 0.05$  時，其對應的數值阻尼比則分別為 0.000025 和 0.067。這也就說明了為何第二振態反應很快地被消除掉而第一振態反應卻能正確地被積分。

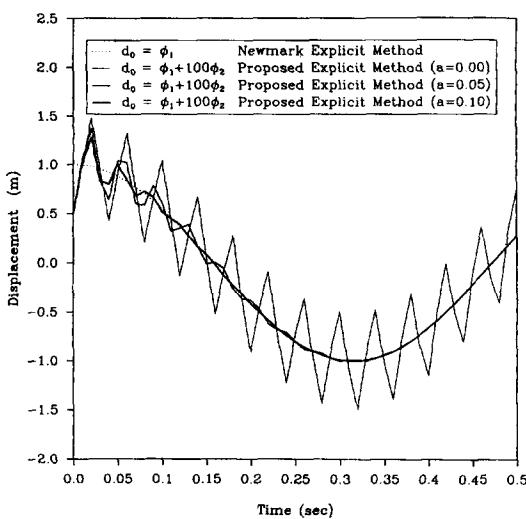


圖 7 第二層樓之自由振動反應

## 6.2 積分法

為了彰顯此積分法特別適用於擬動態試驗，可利用數值模擬的方式來進行研究。首先可將擬動態試驗時的位移增量視為是一個隨機變數  $X$ ，並且假定其為截斷正常分佈 (truncated normal distribution)。其機率密度函數可表示如下：

$$f(x) = \frac{1.00135}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma \quad (56)$$

其中  $\mu$  是平均值而  $\sigma$  則是標準離差。在此選用截斷正常分佈，乃是因一個正常配置的擬動態試驗並不會產生極為異常的位移誤差。一般而言，平均值  $\mu = 1$  可用以模擬一個良好的擬動態試驗。至於詳細的模擬程序可參考文獻 [10,11]。

有一剪力梁式 (shear beam type) 的五層樓建築物，其每層的集中質量與勁度分別為 1kg 和 1000N/m。此結構將受到最大地表加速度調整為 0.3g 之 Taft 地震力的作用。Newmark 外顯式積分法以及此新開發的外顯式積分法 (取  $a = 0.15$ ) 將分別被用來求解此結構的動態反應，並且所採用的時間步長皆為 0.02 秒。關於這兩種方法對於此結構的所有振態在使用時間步長為 0.02 秒時所提供的數值阻尼比詳列於表 1。

表 1 各振態之數值阻尼比

(rad/sec) natural frequency	9.000	26.27	41.42	53.21	60.68
$\Omega = \omega (\Delta t)$	0.180	0.525	0.828	1.064	1.214
$\xi$ Newmark explicit method	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\xi$ Proposed explicit method	0.004	0.011	0.042	0.090	0.136

至於位移誤差的模擬則取  $\mu = 1$  和  $\sigma = 0.001m$ 。圖 8 和圖 9 分別繪出使用 Newmark 外顯式積分法以及此新開發的外顯式積分法的數值模擬結果。從圖 8 可明顯的看出不具數值阻尼的 Newmark 外顯式積分法，其數值模擬的結果已完全被實驗誤差所破壞。相反地，新開發的外顯式積分法其數值阻尼可非常有效的抑制甚或是去除高頻振態之實驗誤差的傳播與累積，而對於低頻振態則可精確的積分。因此可得到非常準確的結果。

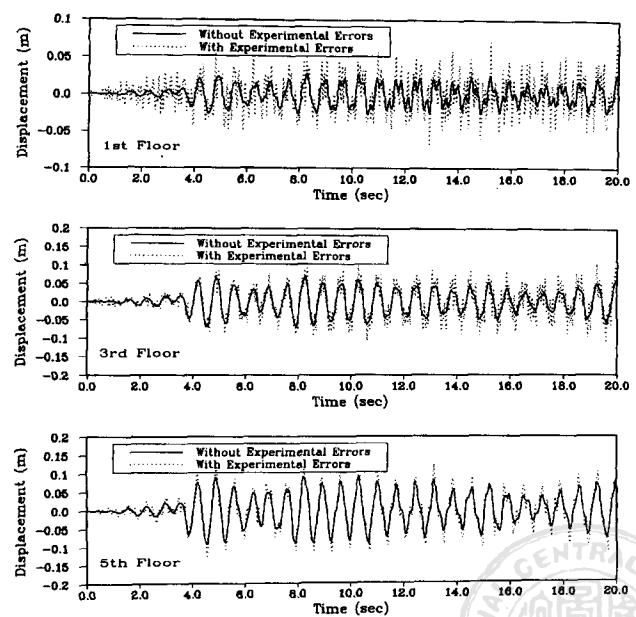


圖 8 Newmark 外顯式積分法之擬動態試驗數值模擬結果

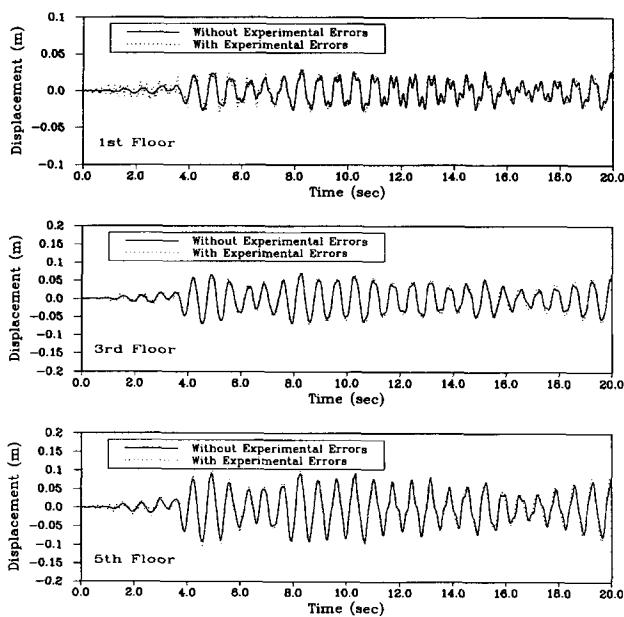


圖 9 新開發外顯式積分法之擬動態試驗數值模擬結果

## 七、結論

本文詳細說明如何發展一族新的外顯式積分法，此族積分法係屬單步積分法且為有條件穩定。另外，尚可以提供相當理想的數值阻尼特性，能有效的抑制或消除不正確的高頻振態反應，而同時不影響低頻振態的正確反應；更難得的是此族外顯式積分法仍保有一般積分法所具備的二階精確度。本積分法非常適用於擬動態試驗，可以抑制甚至是去除因實驗誤差所引起錯誤的高頻振態反應，而卻可對低頻振態反應做正確的積分，進而得到更為可靠的試驗結果。

## 誌謝

本研究係接受國科會 NSC-86-2211-E-319-001 計畫補助，謹此致謝。

## 參考文獻

- Shing, P.B., and Mahin, S.A., "Cumulative experimental errors in pseudodynamic tests," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15, pp. 409-424 (1987).
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., and Taylor, R.L., "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 283-292 (1977).

- Hilber, H.M., "Analysis and design of numerical integration methods in structural dynamics," EERC Report No. 76-29, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA (1976).
- Shing, P.B., and Mahin, S.A., "Elimination of spurious higher-mode response in pseudodynamic tests," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15, pp. 425-445 (1987).
- Bathe, K.J., and Wilson, E.L., "Stability and accuracy analysis of direct integration methods," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 283-291 (1973).
- Belytschko, T., and Hughes, T.J.R., *Computational methods for transient analysis*, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland (1983).
- Houbolt, J.C., "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17, pp. 540-550 (1950).
- Newmark, N.M., "A method of computation for structural dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, pp. 67-94 (1959).
- Hilber, H.M., and Hughes, T.J.R., "Collocation, dissipation, and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, pp. 99-118 (1978).
- Chang, S.Y., and Mahin, S.A., "Two new implicit algorithms of pseudodynamic test methods," M.Eng. Thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley (1992).
- Chang, S.Y., and Mahin, S.A., "Two new implicit algorithms of pseudodynamic test methods," *Journal of Chinese Institute of Engineers*, Vol. 16, No. 5, pp. 651-664 (1993).
- Shing, P.B., Vannan, M.T., and Carter, E., "Implicit time integration for pseudo-dynamic tests," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, pp. 551-576 (1991).
- Thewalt, C.R., and Mahin, S.A., "An unconditionally stable hybrid pseudodynamic algorithm," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, pp. 723-731 (1995).
- Nakashima, M., Kaminosomo, T., and Ishida, M., "Integration techniques for substructure pseudodynamic test," *Proceeding of Fourth U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 2, pp. 515-524 (1990).
- Clough, R.W., and Penzien, J., *Dynamic of Structures*, McGraw-Hill, New York (1967).

86年1月9日 收稿  
86年9月22日 修改  
86年9月23日 接受

