

彎曲元件試驗受輸入波頻率影響之研究

龔東慶¹ 陳堯中² 林保延³

關鍵詞：彎曲元件試驗、剪力波速、剪力波頻率、砂土。

摘要

彎曲元件試驗發展已逾二十年，彎曲元件體積小且試驗簡便，目前已廣泛地運用於各種室內試驗量測土壤剪力波速。理論上，剪力波於彈性界質中傳遞，其頻率並不會影響波速，然而土壤是黏彈性材料，根據研究顯示，彎曲元件試驗結果確實會受輸入波頻率影響。本文不進行影響因素理論推導，而是藉由一系列室內試驗，包括彎曲元件試驗和共振柱試驗，探討砂土在不同有效應力、相對密度和細粒料含量情況，輸入波頻率對波傳時間的影響程度，建立彎曲元件試驗輸入波頻率的決定方式，試驗結果顯示以本文建議的頻率範圍量測砂土剪力波速之準確性令人滿意。

EFFECT OF FREQUENCY OF INPUT WAVE ON BENDER ELEMENT TESTS

Gordon Tung-Chin Kung

*Department of Civil Engineering
Clemson University
Clemson, SC 29634-0911, U.S.A.*

Yao-Chung Chen Bow-Yeng Lin

*Department of Construction Engineering
National Taiwan Univ. of Sci. & Technology
Taipei, Taiwan 10672, R.O.C.*

Key Words: bender element test, shear wave velocity, shear wave frequency, sand.

ABSTRACT

The bender element test has been developed more than twenty years and extensively employed in various laboratory tests to measure shear wave velocity of soil because of its small size and simple testing procedure. In theory, when a shear wave propagates through an elastic medium, the wave velocity would not be affected by the frequency of the wave. However, many studies indicated that the shear wave velocity measured from bender element tests would be influenced by the frequency of input wave because soil is a viscous-elastic material. The objective of this paper is to investigate the influence degree of frequency on shear wave velocity of sand in bender element tests under various conditions, including effective stress, relative density and percentage of fines content. In addition, the resonant column tests were conducted to compare with the results of bender element tests. In this paper, the range of frequency of input wave was proposed, and the accuracy of measurement of shear wave velocity in bender element tests using such frequency range was satisfactory.

¹ Visiting Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Clemson University, U.S.A.

² 國立台灣科技大學營建工程系教授

³ 國立台灣科技大學營建工程系碩士



一、前 言

量測土壤剪力波速現地試驗的基本原理是藉由波的傳遞與接收，估計波傳遞時間，配合傳遞距離便可計算出波速，波傳原理十分簡單，整個計算過程最關鍵的部分是如何判定波何時到達。一般而言，現地試驗由於摒除了土壤擾動的因素，試驗結果應該比室內試驗準確，雖然室內試驗不可避免地會受到試體擾動的影響，不過由於可以獲得土壤完整的應力—應變行為，仍然是不可或缺的試驗方法。1970 到 80 年代，許多研究結果顯示現地試驗量測土壤之剪力模數，明顯大於三軸試驗量測初始彈性模數計算的剪力模數，甚至會超過十倍以上，許多研究將此結果主要歸因於試體擾動的影響。約略同一時期，有一些研究嘗試發展能直接於室內試驗量測土壤的剪力波速，例如彎曲元件試驗 (Shirley 和 Hampton [1]； Shirley [2])。

1980 年代初期，研究顯示彎曲元件試驗結果和現地試驗量測的剪力波速差異並不大，這樣的結果在當時受到相當程度的重視與質疑，後來 Dyvik 和 Madshus [3] 將彎曲元件安裝於共振柱儀器中，針對同一個土壤試體同時進行彎曲元件試驗與共振柱試驗，結果兩者剪力模數相當一致，顯示彎曲元件試驗相當準確；換言之，彎曲元件量測結果明顯地大於傳統三軸試驗量測之初始勁度。其實近二十年來許多有關土壤小應變行為的研究，如 Burland 和 Symes [4]、Jardine 等人 [5]、Burland [6]、Santagata [7] 和 Kung [8] 都指出傳統三軸試驗量測之初始勁度會顯著地小於現地量測值，主要原因是量測方式不恰當以及量測儀器精度不夠，顯然早期的研究認為兩者之差異，主要是取樣擾動的影響並不是十分正確。

近年來儀器的發展精進，彎曲元件試驗所需之儀器如波源產生器和示波器的精度已相當高，加上室內試驗環境干擾容易加以排除，目前彎曲元件試驗已經是一種相當普遍的試驗方法。理論上，剪力波在一彈性界質中傳遞，其波速不會受到頻率大小的影響，不過許多研究指出（如 Arulnathan 等人 [9]； Lohani 等人 [10]），土壤之彎曲元件試驗結果卻會受到輸入波頻率的影響，其原因應該是土壤是黏彈性材料而非彈性材料所致，本文的主要目的並不是要探討其發生機制或推導理論模式，而是希望藉由進行一系列的試驗，建議進行彎曲元件試驗輸入波的頻率範圍，提供未來進行彎曲元件試驗研究的參考，以避免產生過大的試驗誤差。

二、彎曲元件試驗之簡介

彎曲元件是由兩片壓電陶瓷晶片黏結而成，分成並聯和串聯兩種型式，分別使用於發射端和接受端，晶片之間以及周圍皆裹上一層防水材料 epoxy，以防止試驗進行時進水造成短路，同時彎曲元件與基座之間隙亦必須填充 epoxy，以進一步防止水之滲入，試驗建議使用之電壓值為 $\pm 10\text{ Volt}$ 。彎曲元件是由壓電陶瓷材料製成，其特性為當接受外來電壓之激發，會產生撓曲變形行為，且撓曲變形量

會與輸入電壓大小成一定比例，利用此變形特性可以在土壤試體中產生剪力波以進行剪力波速之量測，更詳細的說明可參考龔和歐 [11]。彎曲元件試驗資料處理首先必須決定波傳遞時間，配合傳遞距離計算土壤剪力波速 V_s ，然後依波傳理論公式計算最大剪力模數 G_{\max} ，如式(1)及式(2)：

$$V_s = L_{st} / t \quad (1)$$

其中 L_{st} 為彎曲元件尖端傳遞之距離 (m)； t 為剪力波傳遞之時間 (sec)

$$G_{\max} = \rho V_s^2 \quad (2)$$

其中 ρ 為土壤密度 (kg/m^3)； V_s 為剪力波速 (m/s)

如前述，Dyvik 和 Madshus [3] 驗證了彎曲元件的適用性，不過並未說明如何決定剪力波何時到達。Viggiani 和 Atkinson [12] 建議輸入波型以正弦波為最佳，且當以單一正弦波為輸入波時，波傳遞時間之判定有三種直接的方式，分別為輸入波與接收波之起始點對起始點、波峰對波峰以及波谷對波谷，另外也介紹一種統計分析方法—重疊相關法 (cross-correlation method) 來判斷波傳遞之時間，雖然 Viggiani 和 Atkinson [12] 介紹許多波傳遞時間之決定方式，但並未進一步分析影響因素與使用時機之限制。

Jovičić 等人 [13] 嘗試以解析解和數值解分析剪力波輸入與接收之型態，證實縱使輸入的是完美的剪力波，經過土壤之傳遞，接收波還是會產生壓力波，造成近域效應。另外 Jovičić 等人 [13] 也提出一種共振狀態之波傳遞時間決定方式，其原理是調整輸入波之頻率，於某一頻率接收波會產生最大震幅，則定義為共振頻率，再以共振頻率進行試驗，決定剪力波傳遞之時間。Arulnathan 等人 [9] 進行波傳遞解析解和有限元素數值分析，探討可能之影響因素，分析結果顯示剪力波速確實會受到輸入波頻率的影響。

三、試驗儀器與試驗計畫

本研究將彎曲元件安裝於動力三軸試驗儀器中，針對砂土在不同相對密度、有效應力及細粒料含量的情況下，進行一系列彎曲元件試驗，探討輸入波頻率對波傳速度的影響，另外本研究也進行共振柱試驗，比較彎曲元件試驗和共振柱試驗結果的差異。

3.1 試驗儀器

本研究採用的動力三軸試驗儀器是日本 Seiken 公司 MODELDT-262 型氣壓式振動三軸試驗儀，最大位移量為 $\pm 25\text{ mm}$ ，此套儀器係採應力控制，最大動態荷重為 200 kgf 之正弦波荷重型式，適用頻率範圍為 $0.01\sim 2\text{ Hz}$ ，本文試驗所採用之頻率為 0.5 Hz 。彎曲元件試驗所需之波源產生器採用 Agilent-33120A 機型，此儀器可產生單一波形也可產生數個連續波，另外採用 Nicolet-Integra 10 機型的示波器，此示波器的精度為 12 bit ，共有四個波道，可同步以 $1\text{ MS}/\text{s}$ 的取樣率來進行訊號的接收；最後，本研究採用美國 Soil Dynamics Instruments 公司 Vincent P. Drnevich 所設計之共



振柱儀器進行砂土共振柱試驗。

3.2 試驗計畫

如表 1 所示，本研究採用之砂土土樣，分別取樣於新店溪流域和員林地區，為方便起見，簡稱為新店砂和員林砂，土樣分別為員林砂 (FC = 5%)、新店砂 (FC = 5%) 和員林砂 (FC = 20%)。試驗首先以濕搗法製作員林砂 (FC = 5%) 相對密度 55% 的重模試體，試體高 10 cm、直徑 5 cm，另外也以濕搗法製作新店砂 (FC = 5%) 和員林砂 (FC = 20%) 的重模試體，使其與員林砂 (FC = 5%) 的試體具有相同的初始乾單位重。三種土樣分別於動力三軸儀器中進行均向壓密試驗，在不同的有效壓密應力下 (100、200 和 300 kPa)，進行一系列不同輸入波頻率之彎曲元件試驗，輸入波頻率範圍為 1~40 kHz，彎曲元件試驗包括兩大類：(1) 單一波數彎曲元件試驗和 (2) 連續波數彎曲元件試驗，試驗結果以數種剪力波到達時間的決定方式來進行分析，探討頻率對剪力波傳遞速度的影響。

另外，為了驗證彎曲元件試驗結果的合理性，本研究以不同相對密度 ($Dr = 40\%、55\%、70\%$) 的員林砂 (FC = 5%)，分別進行彎曲元件試驗和共振柱試驗，其中彎曲元件試驗是在動力三軸試驗完成均向壓密試驗後執行，並且是以本研究所建議的頻率範圍進行試驗，最後比較彎曲元件試驗和共振柱試驗的結果。

3.3 剪力波到達時間決定方法

本研究採用數種波到達時間的決定方式，分析上述進行之彎曲元件試驗結果，包括有：

(1) 單一波數直接判定法：

如圖 1 所示，本研究採用 Viggiani 和 Atkinson [12] 和 Lohani 等人 [10] 的建議，共採用四種直接判定剪力波傳遞時間之方式，敘述如下：

- t_a ：輸入波之起始位置到接收波第一個明顯之向上轉折位置。
- t_p ：輸入波之波峰到接收波第一個波峰。
- t_0 ：輸入波波峰至波谷中間電壓值為 0 之位置，到接收波波峰至波谷中間電壓值為 0 之位置。
- t_l ：輸入波之波谷到接收波第一個波谷。

(2) 連續波數共振判定法：

採用 Jovičić 等人 [13] 提出共振狀態之波傳遞時間決定方式，本研究以連續 8 個正弦波輸入進行試驗，輸入波之振幅為 ± 10 Volt，輸入波頻率由 1 kHz 逐步增加至 40 kHz 反覆進行試驗，測試接收波能產生最大振幅反應之共振頻率。如圖 2 所示，共振頻率定義為 f_{res} ，取第八個波峰對應之波傳遞時間，定義為正確的剪力波傳遞時間，定義為 t_{res} 。

(3) 重疊相關法 (cross-correlation method)：

重疊相關法之原理為假設波傳遞為平面波形式並且沒有任何折射波或反射波存在，則一個震波在空間中兩點間 (P1、P2) 之傳遞時間，可定義為將震波於兩點之訊號紀錄函數 ($S1(t)、S2(t)$) 對時間軸做平移，時間平移量設為變數 τ ，求出 $S1(t+\tau)$ 與 $S2(t)$ 相乘之函數值，重疊相關法公式如下：

表 1 彎曲元件試驗編號

均向有效應力 (kPa)	員林砂 (FC = 5%)	新店砂 (FC = 5%)	員林砂 (FC = 20%)
100	I-1	II-1	III-1
200	I-2	II-2	III-2
300	I-3	II-3	III-3

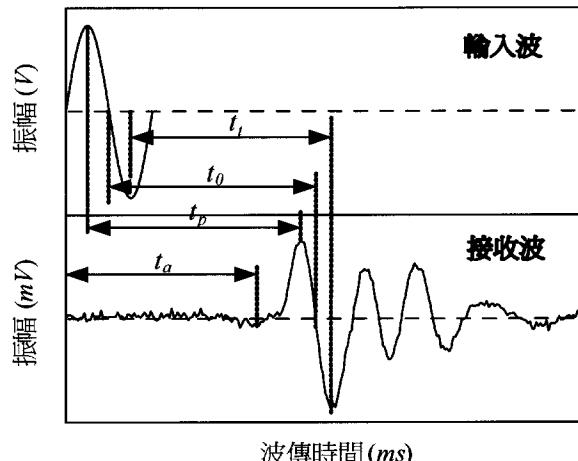


圖 1 單一波數直接判定法

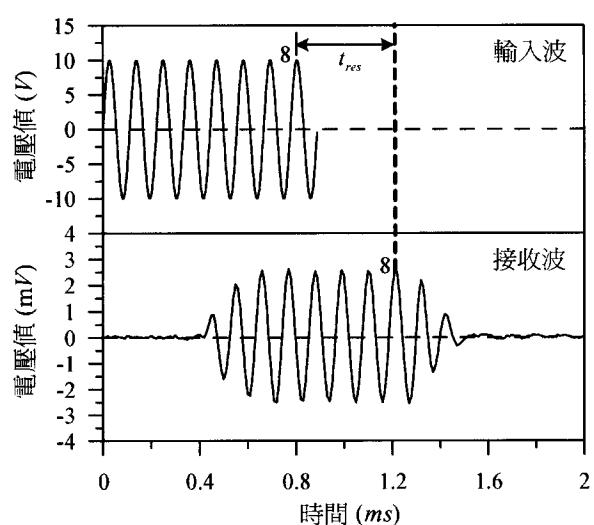


圖 2 連續波數共振判定法

$$CC_{S1-S2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int S1(t+\tau)S2(t)dt \quad (3)$$

其中 T 為訊號總時間長度； τ 為時間平移量。

當 $CC_{S1-S2}(\tau)$ 達到最大值 $CC_{S1-S2}(\tau)_{max}$ ，此時時間平移量 τ 即為震波在 P1、P2 兩點之傳遞時間，分析時本研究以 t_c 表示，運用重疊相關法分析波傳遞時間，則 $S(1)$ 與 $S(2)$ 分別代表輸入及輸出之訊號。重疊相關法經由轉換至頻率域再



進行運算，可以大幅降低計算分析之時間，計算之流程首先運用快速傅立葉轉換將 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$ 由時間域轉換至頻率域，如式(4)、式(5)：

$$L_{S1}(f) = FFT(S_1(t)) \quad (4)$$

$$L_{S2}(f) = FFT(S_2(t)) \quad (5)$$

其中 $L_{S1}(f)$ 和 $L_{S2}(f)$ 代表頻率域之輸入與輸出訊號。其次計算頻率域輸出與輸入訊號之交功頻 (cross power spectrum) $G_{S1-S2}(f)$ ，如下式：

$$G_{S1-S2}(f) = L_{S1}^*(f)L_{S2}(f) \quad (6)$$

其中 L_{S1}^* 是 L_{S1} 之共軛複數 (complex conjugate)。重疊相關法可經傅立葉反轉換計算出 $CC_{S1-S2}(\tau)$ ：

$$CC_{S1-S2}(\tau) = IFFT(CC_{S1-S2}(f)) \quad (7)$$

其中 $IFFT$ 代表傅立葉反轉換。

四、試驗結果

單一波數彎曲元件試驗結果如圖 3 所示 (以 I-1 試驗結果為例)，試驗結果分別以單一波數直接判定法 (t_a , t_p , t_0 , t_t) 和重疊相關法 (t_c) 進行剪力波傳遞時間的判定，其中重疊相關法之應用可參考圖 4。圖 4(a)為編號 I-2 之彎曲元件試驗結果 (輸入波頻率 8 kHz)，經重疊相關法之計算可得圖 4(b)，對照最大值 $CC_{S1-S2}(\tau)_{max}$ 之時間平移量即為波傳遞時間，此例之波傳時間 t_c 為 0.408 ms。如圖 3 所示，當輸入波頻率比較小的情況，剪力波傳遞時間會有非常顯著的變化，隨著輸入波頻率的增加，這五種方法決定之波傳遞時間相當一致，不過當輸入波頻率繼續增加，所決定的波傳遞時間的差異會越來越明顯，相似的結果也在其他試驗中出現，顯示彎曲元件試驗確實會受到輸入波頻率的影響。

連續波數彎曲元件試驗結果以 Jovičić 等人 [13] 建議之連續波數共振判定法進行分析，詳細結果列於表 2。結果顯示三種土樣之剪力波速隨有效應力增加而增加，共振頻率 f_{res} 也隨著有效應力增加而增加，大致落在 7~11 kHz，另外， L_u/λ 比值除了試驗編號 I-1 以外，大致隨著有效應力增加而減少，且除了試驗編號 II-1 以外， L_u/λ 大約等於 4；換言之，剪力波傳遞距離大約等於波長的 4 倍，試驗會產生一種共振狀態，此時接收波的訊號最強。

若比較不同頻率下連續波數彎曲試驗接收到的最大振幅，如圖 5 所示，所有的試驗結果都顯示，當輸入波頻率大於或小於共振頻率時，接收波的振幅會明顯地減小，當頻率為 1~2 kHz，接收波的訊號非常弱，不容易判別，因此圖 5 部分試驗曲線頻率為 1 kHz 的資料點並未繪出。整體而言，產生最大振幅之頻率範圍介於 7~11 kHz 之間，輸入波頻率介於 9~10 kHz 是建議的試驗範圍。

若以 Jovičić 等人 [13] 建議之連續波數共振判定法決定之 t_{res} 為正確的剪力波傳遞時間，將所有單一波數彎曲元件試驗結果對 t_{res} 進行正規化，如圖 6 所示，當試驗採用較

低的輸入波頻率(如 2 kHz)，所導致之試驗誤差可能超過 20%，甚至達到 30~40%，若以正負 3% 之試驗誤差為可接受之範圍，則各土樣合適之輸入波頻率範圍 (Δf) 計算結果可參見圖 6。基本上，當輸入波頻率在 8~10 kHz 範圍內進行單一波數彎曲元件試驗，則不論砂土試體的有效應力大小、細粒料含量多寡以及採用何種波傳遞時間決定方式，都可獲致相當一致的結果，其正規化波傳遞時間 (t/t_{res}) 都幾近於 1。另外，圖 6 也同時標示各試驗之共振頻率 f_{res} ，九組試驗的共振頻率皆位於最合適的頻率範圍內；換言之，單一波數和連續波數彎曲元件試驗結果是相當吻合的。

為了驗證彎曲元件試驗之正確性，本研究以不同相對密度 ($Dr = 40\%, 55\%, 70\%$) 的員林砂 ($FC = 5\%$)，分別進行彎曲元件試驗和共振柱試驗，其中彎曲元件試驗以本研究建議之輸入波頻率範圍進行試驗，共振柱試驗量測的砂土剪力模數，以公式(2)計算其剪力波速。結果如圖 7 所示，不論砂土相對密度的大小，在均向有效應力比較小的情況 (如 100 kPa)，共振柱試驗求得之剪力波速會比彎曲元件試驗量測值稍大；當均向有效應力介於 150~250 kPa，兩種試驗結果相當一致；至於在較大的均向有效應力情況 (如 300 kPa)，則是彎曲元件試驗量測的剪力波速稍大，整體而言，兩種試驗的結果相當一致。最後，圖 8 比較彎曲元件試驗和共振柱試驗量測之剪力模數，當採用合適的輸入波頻率進行彎曲元件試驗，其試驗結果之準確性令人滿意。

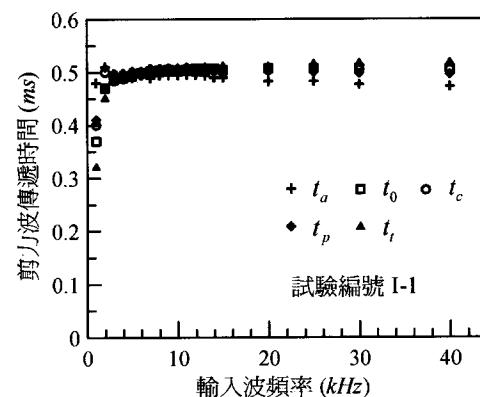


圖 3 單一波數彎曲元件試驗剪力波到達時間之判定結果

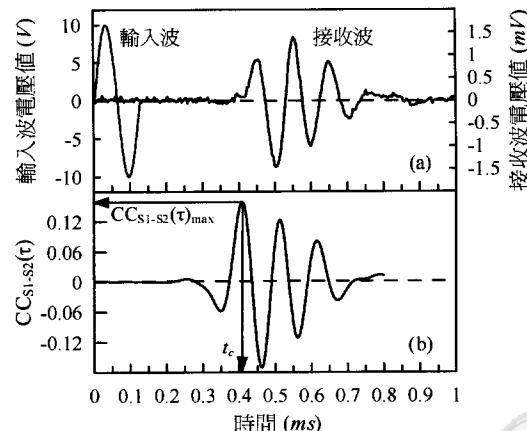


圖 4 試驗編號 I-2 之重疊相關法計算結果 (輸入波頻率為 8 kHz)



表 2 連續波數彎曲元件試驗結果

試驗編號	共振頻率 f_{res} (kHz)	傳遞時間 t_{res} (ms)	剪力波速 V_s (m/s)	L_{tr}/λ
I-1	8.5	0.504	191.7	4.284
I-2	10.5	0.417	231.1	4.379
I-3	11	0.361	266.2	3.971
II-1	9.5	0.554	174.2	5.263
II-2	9.5	0.443	217.3	4.209
II-3	10	0.361	251.4	3.610
III-1	7	0.586	163.9	4.102
III-2	9	0.450	212.0	4.050
III-3	10	0.386	245.9	3.860

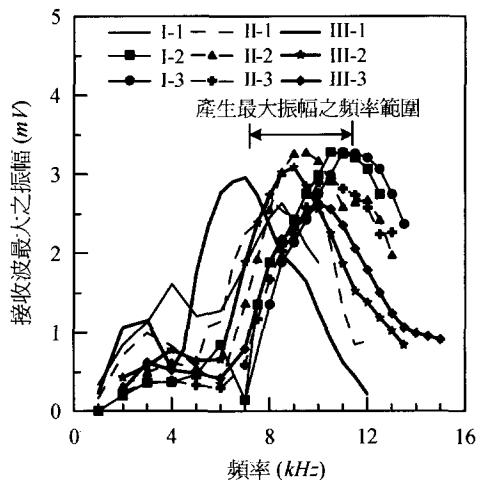
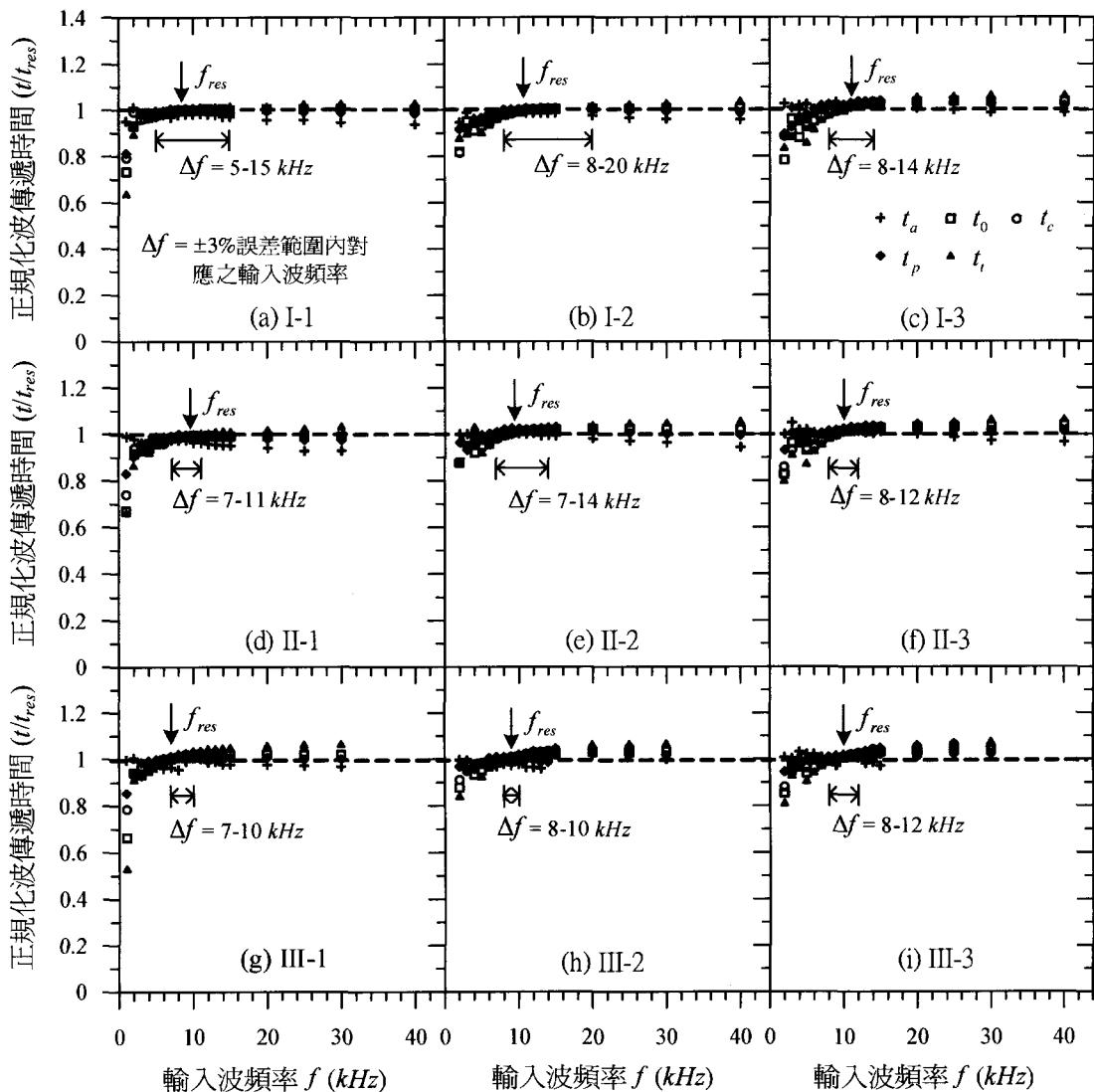


圖 5 連續波數彎曲元件試驗接收波之最大振幅比較

圖 6 以 t_{res} 對單一波數彎曲元件試驗剪力波到達時間正規化之結果

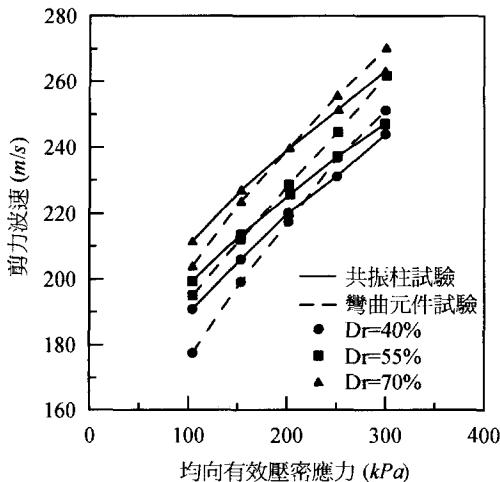


圖 7 不同砂土樣剪力波速量測結果比較

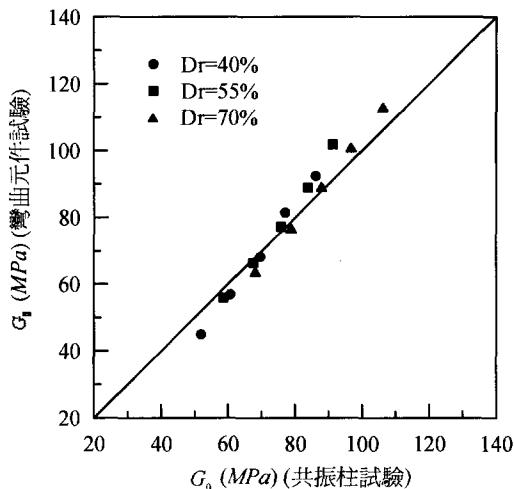


圖 8 不同砂土樣剪力模數量測結果比較

五、結 論

綜合以上分析結果，本研究有以下之結論：

連續波數彎曲元件試驗結果顯示，共振頻率會隨著均向有效應力增加而增加，以均向有效壓密應力 100~300 kPa 而言，共振頻率介於 7~11 kHz 之間，比較不同土樣的試驗結果，建議之頻率範圍為 9~10 kHz，並且除了試驗編號 II-1 之外，共振狀態下各組試驗之波傳遞距離和波長的比值大致為 4 倍。

若單一波數彎曲元件試驗能採用建議的頻率範圍 Δf ，則不論砂土試體的有效應力大小、細粒料含量多寡以及採用何種波傳遞時間決定方式，都可獲致相當準確的結果。依單一波數正負 3% 之試驗誤差定義 Δf 為 8~10 kHz，依連續波數共振頻率定義 Δf 為 9~10 kHz，其建議之頻率範圍相當一致，可提供未來進行彎曲元件試驗之參考。

彎曲元件試驗和共振柱試驗結果顯示，不論砂土相對密度的大小，在較低的均向有效壓密應力，共振柱試驗求

得的剪力波速會比彎曲元件試驗量測值稍大；相反的，在較高的均向有效壓密應力，彎曲元件試驗剪力波速量測值會比共振柱試驗結果稍大，整體而言，以本研究所建議的頻率範圍進行彎曲元件試驗，量測之準確性令人滿意。

參考文獻

- Shirley, D.J., and Hampton, L.D., "Shear-wave measurements in laboratory sediments," *Journal of Acoustics Society of America*, Vol. 63, No. 2, pp. 607–613 (1978).
- Shirley, D.J., "An improved shear wave transducer," *Journal of Acoustics Society of America*, Vol. 63, No. 5, pp. 1643–1645 (1978).
- Dyvik, R., and Madshus, C., "Lab measurements of Gmax using bender elements," *Advances in the Art of Testing Soils Under Cyclic Conditions, Conference*, Detroit, MI, Geotechnical Engineering Division, ASCE, New York, pp. 186–196 (1985).
- Burland, J.B., and Symes, M.J., "A simple axial displacement gauge for use in the triaxial apparatus," *Geotechnique*, Vol. 32, pp. 62–65 (1982).
- Jardine, R.J., Symes, M.J., and Burland, J.B., "The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus," *Geotechnique*, Vol. 34, No. 3, pp. 323–340 (1984).
- Burland, J.B., "Ninth Laurits Bjerrum Memorial Lecture: 'Small is beautiful — The stiffness of soils at small strain,'" *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 26, pp. 499–516 (1989).
- Santagata, M.C., "Factors affecting the initial stiffness and stiffness degradation of cohesive soils," Ph.D. Dissertation, Department of Civil and Environment Engineering, MIT, Cambridge, MA (1998).
- Kung, T.C., "Surface settlement induced by excavation with consideration of small-strain behavior of Taipei silty clay," Ph.D. Dissertation, Department of Construction Engineering, National Taiwan University of Science and Technology, Taipei, Taiwan (2003).
- Aruhnathan, R., Boulanger, R.W., and Riemer, M.F., "Analysis of bender element tests," *Geotechnical Testing Journal*, GTJODJ, Vol. 21, No. 2, pp. 120–131 (1998).
- Lohani, R.N., Imai, G., and Shibuya, S., "Determination of shear wave velocity in bender element test," *Proceeding of Earthquake Geotechnical Engineering*, Rotterdam, Netherlands, pp. 101–106 (1999).
- 龔東慶、歐章煜，「土壤小應變三軸試驗之發展與應用」，《地工技術》，第 96 期，第 5–16 頁 (2003)。
- Viggiani, G., and Atkinson, J.H., "Interpretation of bender element tests," *Geotechnique*, Vol. 45, No. 1, pp. 149–154 (1995).
- Jovičić, M., Coop, R., and Simic, M., "Objective criteria for determining Gmax from bender element tests," *Geotechnique*, Vol. 46, No. 2, pp. 357–362 (1996).

