BIBLID 0254-4466(2014)32:3 pp. 69-94
漢學研究第 32 卷第 3 期（民國 103 年 9 月）

《數》、《筭數書》和《九章筭術》中一類楔形體研究

——兼論中國早期求積算法的某些特點**

鄒　大　海*

摘　要

本文對出土的秦代竹簡算書《數》、西漢初年竹簡算書《筭數書》和傳世數學經典《九章筭術》中一類在古代較難處理的楔形體進行比較研究，挖掘它們之間的聯繫。利用《數》中的材料為認識秦及先秦處理體積問題時採用的基本立體提供了新的證據，在此基礎上為《數》中楔形體題目的術文提出了校補方案，推論這種立體的求積方法產生於推導，並提出了復原方案。借鑒生物學中進化和基因的觀念，論述三項文獻中的算法具有共同的特點和淵源，而這種淵源流傳到《九章》的先秦祖本比另兩項文獻很可能要早，同時也就上古時代體積算法的產生與流傳問題提出了新的認識。

關鍵詞： 秦簡《數》、漢簡《筭數書》、《九章筭術》、劉徽、楔形體、算法演化

2013 年 2 月 19 日收稿，2014 年 5 月 16 日修訂完成，2014 年 7 月 24 日通過刊登。

* 作者係中國科學院自然科學史研究所研究員。

** 本文屬於中國科學院自然科學史研究所「科技知識的創造與傳播」重大項目的子課題「中國早期數學知識的創造與形態特徵——以若干典型案例為中心的研究」。兩位匿名審稿專家以及《漢學研究》編輯部的寶貴意見，使拙文增色不少，謹致謝忱。

一、前　言

二十世紀初以來，簡牘文獻在中國歷史研究的很多領域都扮演著重要的角色，而在中國數學史研究中，也不時有簡牘材料的身影。但長期以來只有比較零星的簡牘數學材料面世，因此其作用很有限。新舊世紀之交以來，陸續有一些篇幅較大的數學著作或發表或出土。它們時代早，內容豐富，常有出人意料之處，為瞭解中國數學和中國文明的發展提供了重要的資料。現在已經整部發表的有 1983、1984 年之交出土於湖北江陵張家山 247 號西漢墓的《筭數書》，和湖南大學嶽麓書院近年從香港文物市場購入的秦簡算書《數》。前者墓葬年代約為公元前 186 年，編著年代當更早些；後者是首次發現的秦代竹簡數學著作，編著時代可能不晚於公元前 212 年，它們都比現存傳本數學著作的編定時間要早約一百餘年甚至更早，非常珍貴。這些時代不同、同異互見的材料，使我們有可能利用新的視角和方法，發現中國早期數學發展的一些特點。本文將對兩書和數學經典《九章筭術》中的一類在當時較難處理的楔形體做一歷史考察，藉以反映中國傳統數學的某些特點。

二、關於一類楔形體的三種原始文獻及其比較

（一）關於一類楔形體的三種原始文獻

1.《九章筭術》商功章第 18 題是一個名為芻甍的立體的體積計算問題

> 今有芻甍，下廣三丈，袤四丈；上袤二丈，無廣；高一丈。問積幾何？荅曰：五千尺。術曰：倍下袤，上袤從之；以廣乘之，又以高乘之，六而一。[1]

這裡給出芻甍體積的算法相當於公式：

V＝〔（下袤×2＋上袤）×廣×高〕÷6。

2. 張家山漢簡《筭數書》記有名為斬都的立體的體積計算問題

1　郭書春匯校，《匯校九章筭術》第二版（瀋陽：遼寧教育出版社，2004），頁 185。本文所引《九章筭術》及其劉徽注原文，皆據此本。

> 斬都　斬都下厚四尺，上厚二尺，高五尺，袤二丈，責（積）百卅三尺少半尺。術曰：倍上厚，以下厚增之；以高及袤乘之，六成一。[2]

這裡給出斬都體積的算法相當於公式：

V=〔（上厚×2＋下厚）×高×袤〕÷6。

3. 嶽麓書院藏秦簡《數》所記楔形體的體積計算問題

> 城上廣二丈，下廣五丈，上袤六丈六尺，下毋袤，高六丈四尺，積尺六萬三千三百六十尺。術曰：以上。[3]

上文記錄在原始編號爲 0456 的竹簡上。上述釋文在原簡上有的文字並不清楚，是整理者根據上下文和殘存筆劃確定的。簡 0456 的首字漫漶，殘存的字形作，單憑字形實在不知道它是「城」字。廣是東西方向的長度，袤是南北方向的長度。由於城牆的下頭不大可能只有廣度而沒有袤度，而上頭卻既有廣度又有袤度，所以我們對此字存疑。問題的術文在 0456 簡上只存「以上」二字，其後當另有一簡，可惜不存。

（二）三個立體的比較

三條文獻都用袤、高和責（通「積」）或「積」來刻畫立體。還有一項與袤相垂直的參數，《數》和《九章》稱之爲廣，《筭數書》則稱之爲厚。從問題給出的數據看，斬都的上厚、下厚分別只有袤的 10 分之 1、5 分之 1，之所以用「厚」這個字，可能是因爲從厚度這個涵義著眼的緣故。

《數》0456 簡的題目和答案是完整的。經檢驗，答案與題設也相吻合。由於這個問題中的形體不是方方正正的規則立體，數字也很複雜，單靠猜測和拼湊幾乎不可能讓答案和已知數相符合。所以可以斷定作者知道這種立體的體積算法。術文現存僅兩字，顯然不能計算出正確的答案，這給我們留下了想像的空間。

通過仔細對比可以發現，上述三種文獻中的三個立體都有一個長方形面，一條不在該長方形平面上而與其一組邊平行的棱。它們都可以視爲：將

---

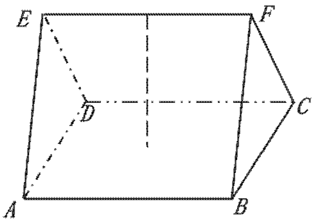
2 張家山二四七號漢墓竹簡整理小組編著，《張家山漢墓竹簡（二四七號墓）》（釋文修訂本）（北京：文物出版社，2006），頁 151。

3 朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》（上海：上海辭書出版社，2011），頁 141。

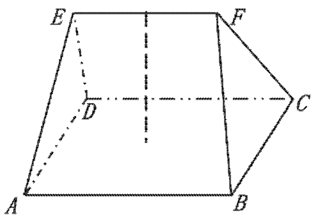
一個直三棱柱（底面爲三角形，三條側棱相等且都與底面垂直，三個側面爲長方形的立體，如圖一）的一條側棱改變其長度（增長或減短）後得到的楔形體。它們都有一個面爲長方形（*ABCD*），有一條棱（*EF*，即改變了長度的側棱）與這個長方形的一組邊（*AB*、*CD*）平行。這可以有多種情形，其中兩種值得注意：一種情形是這條棱（*EF*）在長方形（*ABCD*）的上方，且比長方形中與之平行的那組邊（*AB*、*CD*）要短（圖二）；《九章》的芻甍屬於這種情形。另一種情形是那條棱（*EF*）在長方形面（*ABCD*）的下方，且比長方形中與之平行的那組邊（*AB*、*CD*）要長（如圖三），《筭數書》的斬都和《數》的立體都屬於這種情形。

儘管斬都和芻甍分屬不同情形，但兩者體積算法都可以統一表示爲：

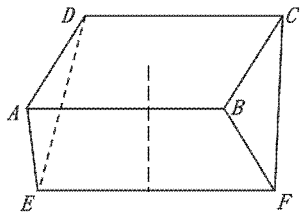
$$V=\left[(AB\times 2+EF)\times BC\times \text{高}\right]\div 6$$



圖一



圖二



圖三

其特點是：楔形體中有三條互相平行的棱，其中作爲長方形邊的那條要加倍，而後與不在長方形上的那條棱相加。[4] 不僅如此，而且就術文而言，如果前

4　也可以看作這三條平行棱相加，這時上述公式與《九章》羨除體積算法的數學表達一致。古克禮（Christopher Cullen）教授曾提到斬都與羨除有明顯的相似性，見 Christopher Cullen, *The Suan Shu Shu* 筭數書 ‘*Writings on Reckoning*’: *A Translation of a Chinese Mathematical Collection of the Second Century BC, with Explanatory Commentary* (Cambridge: Needham Research Institute Working Papers, No. 1, 2004), p. 92。道本周（Joseph W. Dauben）教授曾考慮過《筭數書》斬都形狀的多種可能，其中一種即視為《九章》的羨除之特例。見：Joseph W. Dauben, “算數書 *Suan Shu Shu*: A Book on Numbers and Computations, English Translation with Commentary,” *Archive for History of Exact Sciences* 62.2 (2008.3): 91-178。（「斬都」二字，兩位都採用整理小組的最先釋文作「鄆都」。）但羨除的一個側面與頂面垂直，而這裡的三個楔形體並無此限制，故不能將它們視為《九章》羨除的特例。

半部把「上」與「下」互換、「厚」與「袤」互換，後半部把「廣」與「袤」互換，則兩者的術文完全可以互換而不致造成差錯：通過互換，由《筭數書》斬都的術文可得到芻甍的術文，與《九章》芻甍的術文相比，只在無關算理的文字上稍微有異；反之，由《九章》芻甍的術文可以得到斬都的術文，與《筭數書》中斬都的術文相比，也只是無關算理的文字稍微有異。[5] 可以說，斬都和芻甍的求積法具有相同的抽象性數學結構，只是用語有部分差異，這說明古人有可能認爲它們是同類立體。

就立體形態而言，《九章》的芻甍與《算數書》的斬都、《數》0456 簡的立體兩者中任何一個的差異，明顯大於《筭數書》的斬都與《數》中的立體之間的差異，那麼可以推論，與斬都形態差異較小的《數》的立體，很可能有一種算法和相應的術文與斬都的算法和術文之差異，小於芻甍和斬都之差異，或至多與芻甍和斬都之差異相當。而上文我們已經闡明芻甍與斬都的算法一致、術文之差異亦甚小，因此《數》0456 簡立體應存在一種算法與《筭數書》斬都一致，而術文之差異亦應甚小。所以，我們可以根據差異不大的芻甍、斬都的術文之共性，對《數》0456 簡立體的術文進行復原如下：

「以上廣倍之，下廣增之，以高及袤乘之，六成一。」

當然，我們主要是從計算方法的合理性上考慮復原出上述術文的。在具體文字上自然還有別的可能，如「增」可以改爲「從」，「以高及袤乘之」也可以改爲「以高、袤乘之」、「以袤及高乘之」或「以袤乘之，有以高乘之」等。

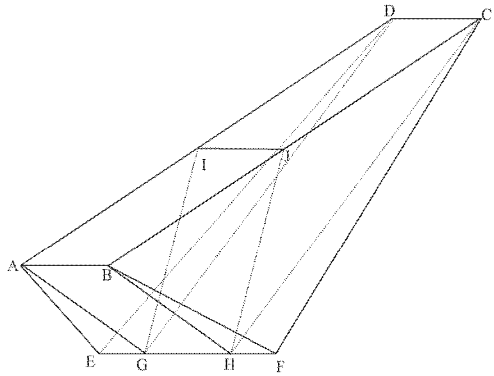
三、術文的正確性及其意義

三項文獻中，《筭數書》和《九章》保存著完整的術文，它們給出了與答案相符合的體積算法。我們容易用現代的數學方法證明它們是正確的。

（一）對於《筭數書》斬都術文正確性的證明

5　將芻甍的上袤加長至超過下袤，然後上下顛倒過來，再以鉛垂線為軸旋轉 90 度，就得到斬都。

如圖四，$EF\text{-}ABCD$ 爲斬都，其頂面 $ABCD$ 爲長方形，AB、CD 爲上厚，EF 爲下厚，AD、BC 爲上袤，作 AG、BH 垂直於 EF 並與之交於 G、H，連接 GD、HC，在平面 AGD 內作 GI 垂直於 AD 並交 AD 於 I，在平面 BHC 內作 HJ 垂直於 BC 交 BC 於 J。因 AB 垂直於 AG 和 AD，所以也垂直於平面 AGD，故 AB 垂直於 GI，所以 GI 同時垂直於 AB 和 AD，故亦垂直於平面 $ABCD$，所以 GI 是斬都的高，同樣 HJ 也是斬都的高。



圖四

斬都 $EF\text{-}ABCD$ 由三棱柱 $AGD\text{-}BHC$ 和兩個三棱錐 $E\text{-}AGD$、$F\text{-}BHC$ 組成，所以：

$$V_{EF\text{-}ABCD}=V_{AGD\text{-}BHC}+V_{E\text{-}AGD}+V_{F\text{-}BHC}=S_{\triangle AGD}\times AB+(S_{\triangle AGD}\times EG)\div 3+(S_{\triangle BHC}\times HF)\div 3$$

$$=[(AD\times GI)\div 2]\times AB+\{[(AD\times GI)\div 2]\times EG\}\div 3+\{[(BC\times HJ)\div 2]\times HF\}\div 3$$

$$=[(AD\times GI)\times AB]\div 2+[(AD\times GI)\times EG]\div 6+[(BC\times HJ)\times HF]\div 6$$

$$=[(\text{上袤}\times\text{高})\times\text{上厚}]\div 2+[(\text{上袤}\times\text{高})\times EG]\div 6+[(\text{上袤}\times\text{高})\times HF]\div 6$$

$$=[3\text{倍上厚}\times(\text{上袤}\times\text{高})]\div 6+[(EG+HF)\times(\text{上袤}\times\text{高})]\div 6$$

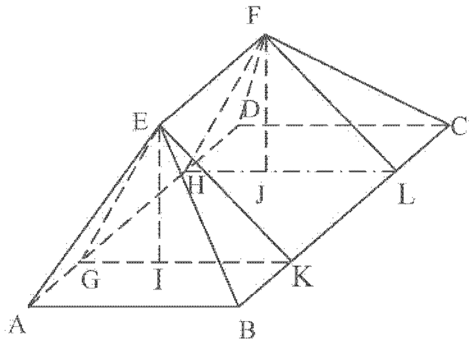
$$=[(2\text{倍上厚}+EG+\text{上厚}+HF)\times(\text{上袤}\times\text{高})]\div 6$$

$$=(2\text{倍上厚}+\text{下厚})\times(\text{上袤}\times\text{高})\div 6\text{。}$$

（二）芻甍術文的正確性

對《九章》的芻甍，分解方式與斬都稍有不同。如圖五，在芻甍 $EF\text{-}ABCD$ 中，底 $ABCD$ 爲矩形，EF 爲上袤，AD、BC 爲下袤（與上袤 EF 平行），AB、CD 爲下廣。過 E、F 各作一平行於 AB、CD 的平面與底面 $ABCD$ 垂直，交

於線段 GK、HL。又在三角形 EGK、FHL 內分別作 EI、FJ 分別垂直於 GK、HL，I、J 爲垂足，那麼 EI、FJ 分別是三角形 EGK 和 FHL 的高，而且它們相等，都是芻甍的高。這樣，芻甍 $EF\text{-}ABCD$ 可以分解爲一個三棱柱 $EGK\text{-}FHL$ 和兩個四棱錐 $E\text{-}ABKG$、$F\text{-}CDHL$ 來求積：



圖五

$$
\begin{aligned}
V_{EF\text{-}ABCD} &= V_{EGK\text{-}FHL} + V_{E\text{-}ABKG} + V_{F\text{-}CDHL} = S_{\triangle EGK} \times EF + (S_{\square ABKG} \times EI) \div 3 + (S_{\square HLCD} \times FJ) \div 3 \\
&= [(GK \times EI) \div 2] \times EF + AB \times AG \times EI \div 3 + CD \times HD \times FJ \div 3 \\
&= (AB \times EI \times EF) \div 2 + AB \times AG \times EI \div 3 + AB \times HD \times EI \div 3 \\
&= [3EF \times (AB \times EI)] \div 6 + [2AG \times (AB \times EI)] \div 6 + [2HD \times (AB \times EI)] \div 6 \\
&= [(3EF + 2AG + 2HD) \times (AB \times EI)] \div 6 \\
&= \{[2(AG + GH + HD) + EF] \times (AB \times EI)\} \div 6 \\
&= [(2\text{倍下袤} + \text{上袤}) \times \text{廣} \times \text{高}] \div 6\text{。}
\end{aligned}
$$

（三）正確的術文源於合適的推導

上面我們證明《九章》的芻甍和《筭數書》的斬都的術文都是正確的，那麼是古人猜對了算法，還是推導出了正確的算法？

首先，這兩種立體不是簡單的立體，形狀並不規則，題設中的數據也比較大，單憑直觀猜測幾乎不可能得到正確答案，更難通過湊數使題設和答案完全一致，並進而將湊數方式轉化爲計算方法。其次，術文中並沒有出現題設中給出的已知數據，兩種術文都是具有普遍意義的一般性表述。其三，術文給出的算法很複雜，單憑直觀和猜測幾乎不可能得出這樣正確無誤的一般

性計算方法。因此，我們可以推斷古人的術文應該是由某種推導得出的。[6]

那麼古人會不會按照我們上面的方法進行推導而得出術文呢？從今人的知識背景看，上述證明是明白易曉的，也符合從簡單推出複雜、從已知推出未知的古今通例。但其中的繪圖方式、符號表達和符號運算，並不符合上古中國人的知識結構和思維習慣。另外，上述推導中分割出來的三棱柱、三棱錐和四棱錐是一般形狀的立體，它們不是中國上古時代的基本形體，其體積算法也未見於上古的算書中。[7] 所以古人不大會以它們的求積算法為出發點進行推導。因此，上述證明並不能視為古人推導這些立體的體積算法之可能途徑。

那麼古人是怎樣得到這些計算方法的呢？

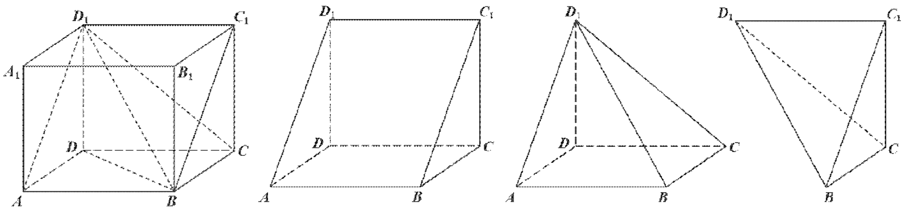
四、古人推導立體體積算法時常用的簡單而基本的立體

長方體是僅次於正方體的極為簡單的立體，其體積計算法為各個不同的古代民族所認識，有時甚至是作為體積的定義來對待的。中國古人也往往以長方體及由它分解成的立體為基本的形體：如圖六，任選長方體 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的一組相對面，如 ADD_1A_1 和 BCC_1B_1，通過它們的對角線 AD_1 和 BC_1 作平面，將長方體分解為兩個底為直角三角形的直三棱柱 $ADD_1\text{-}BCC_1$ 和 $AA_1D_1\text{-}BB_1C_1$，稱為壍堵。在一個壍堵如 $ADD_1\text{-}BCC_1$ 中，過從一底如 ADD_1 的一個銳角頂點 D_1 出發的兩條對角線（矩形 ABC_1D_1 的對角線 D_1B 和矩形 CDD_1C_1 的對角線 D_1C）的平面，將壍堵分解為一個底邊為長方形（$ABCD$）、一條棱（DD_1）與之垂直的四棱錐（$D_1\text{-}ABCD$），和一個各面都是直角三角形的四面體（三棱錐 $D_1\text{-}BCC_1$），分別稱為陽馬和鱉臑。過一陽馬（$D_1\text{-}ABCD$）的垂直於底面長方形（$ABCD$）的棱（DD_1）與底面上的相應對

6 陳良佐已曾以斬都公式複雜為由推論其源於推導。見陳良佐，〈《筭數書》中體積問題與中國古代體積理論的四個基本原理〉，見「臺灣數學博物館」網站／數學史特區／《筭數書》，2009.9.10，http://museum.math.ntnu.edu.tw/fulltext/251_20090910231440.pdf。

7 這並不意味著當時的數學家不會計算它們的體積，也不意味著當時沒有文獻記載它們的體積算法。但既然已知的多種文獻都沒有涉及，說明當時對這種形體的關注度是不夠的。

角線（BD）的平面，又將陽馬分解爲兩個鱉臑（三棱錐 D_1-ABD 和 D_1-BCD）。劉徽在給《九章筭術》的立體問題作注時，用長方體（主要是正方體，但很多情形下仍適用於長方體的情形）及由之分出的壍堵、陽馬和鱉臑作爲基本立體進行分割、拼合，並在操作過程中常常借助棊（立體模型）來進行直觀的展示，以解決立體體積問題，這實際反映了長方體、壍堵、陽馬、鱉臑是中國傳統數學用出入相補原理求解未知的立體體積問題時採用的基本立體。[8]



圖六

任意一個長方體可以分解爲兩個相等的壍堵，由此可以推出後者的體積爲前者之半。但對於陽馬和鱉臑來說，情形要複雜些。當長方體的長、寬、高（古人更多地用廣、袤、高表示）三度相等，即它爲正方體時，由它分解成的三個陽馬因爲全等而體積相等，而由它分解成的六個鱉臑因爲要麼全等、要麼對稱而體積相等，由此可以推出陽馬和鱉臑的體積分別是該正方體的三度乘積的三分之一和六分之一。但當長方體的三度不都相等時，三個陽馬、六個鱉臑並非分別全等或對稱，其體積分別相等並不是當然的。[9] 不過，

8 錢寶琮在講劉徽用棊驗法處理體積問題時說：「其他各種直線圖形所包含的體積都可用上述四種基本立體積來拼合計算」。見錢寶琮主編，《中國數學史》（北京：科學出版社，1981），頁 65。吳文俊說，通過分解成一些基本立體是「《九章》以至《劉注》解決體積問題的出發點」。見吳文俊，〈出入相補原理〉，《中國古代科技成就》（北京：中國青年出版社，1978），頁 93。吳文俊把這種方法往前推到《九章》時代，但他沒有提及證據。雖無證據，但這無疑是正確的。因為這反映了中國古代數學的傳統，下文我們也將提供一些證據。中國古代用這四種立體來處理體積問題，已成為很多學者的共識。如陳良佐認為中國古代用這四種「基本棊組合成幾個等高的長方體的和。於是該立體就可以藉著那些長方體的和，求得」。見陳良佐，〈《筭數書》中體積問題與中國古代體積理論的四個基本原理〉。

9 劉徽關於《九章》「壍堵術」和「陽馬術」的注文，表現了這種簡單而自然的思想。見郭書春匯校，《匯校九章筭術》第二版，頁 182。

《九章》已有它們的體積算法，說明古人用不是特別充分的理由認定它們分別相等。我們不妨做這樣的推想：如圖六，一個陽馬 D_1-$ABCD$ 可以分解爲兩個鱉臑 D_1-ABD 和 D_1-BCD，它們都以 DD_1 爲高，它們的底面 ABD 和 BCD 是全等的三角形，因此，古人很容易認爲這兩個鱉臑的體積是相等的。[10] 而從另一個角度看，鱉臑 B-CDD_1 和 B-CC_1D_1 又都由陽馬 B-CDD_1C_1 分解而成，它們都以 BC 爲高，它們的底面 CDD_1 和 CC_1D_1 也是全等的三角形，因此古人也容易認爲其體積相等。由於鱉臑 D_1-BCD 和鱉臑 B-CDD_1 是同一個立體，所以古人也會很容易地認爲上述三個鱉臑體積相等。這樣，古人也就會認爲一個長方體的體積既是由它分割出的一個鱉臑的 6 倍，也是由它分割出的一個陽馬的 3 倍。從而可以得到陽馬和鱉臑的體積算法。

由於《九章》已有一般性的壍堵、陽馬、鱉臑的體積算法，可以推定認識這些基本立體的時代下限不晚於西漢晚期。而出土文獻則說明其使用的時代要早得多。

在《數》中不僅有基本立體中長方體的求積方法，而且有兩支簡涉及壍堵（名稱不一定相同）的體積算法：

投除之述曰：半其袤，以廣、高乘之，即成尺數也。（第 0977 簡）[11]

10 古人做這種認定有兩種可能的思路，一種是考慮兩個立體的底面積和高分別相等，就認為它們的體積相等，郭書春曾提到劉徽《九章筭術注》記錄了前人的這種思想，也反映在《九章》本身中。見：郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》（濟南：山東科學技術出版社，1992），頁 135-138。另一種思路是考慮兩個立體的每一層截面面積來判定它們的體積。郭書春認為劉徽到祖沖之有這種思想，並注意到先秦《荀子》有「積微成著」思想、惠施有「無厚不可積也，其大千里」的命題，說明當時對「積成立體的面有沒有厚度的問題」有考慮（郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，頁 266）。筆者認為先秦時期存著線能由一系列點積累而成、面能由一系列線積累而成、立體能由一系列面積累而成的所謂不可分量可積的觀念（當然也有反面的責難），這種觀念在先秦對數學有影響。見鄒大海，《中國數學的興起與先秦數學》（石家莊：河北科學技術出版社，2001），頁 274-434、506；鄒大海，〈墨家名家的不可分量思想與運動觀〉，《漢學研究》19.1(2001.6): 47-75。但這種思想當時在數學上應用到什麼程度及如何應用，尚難弄清楚。

11 朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，頁 138。首字在 2010 年 9 月 22 日「《嶽麓書院藏秦簡》（第二卷）國際研讀會」的討論底稿上作「救（求）」，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》仍其舊。許道勝提到他贊同該會上有專家釋為「投」字的意見，「投」

☐廣袤相乘，高乘之，二成一尺。（J13 簡）[12]

前者名除，是一種墓道。後者前面部分殘損，立體名稱未知。兩者或其特例都應與《九章》壍堵具有相同的幾何形狀。因此，0456 簡的作者具有應用形如壍堵的立體作爲基本立體進行求積推導的知識背景。[13]

「陽馬」、「鱉臑」之名在《數》和《筭數書》中都沒有出現，兩書的現存部分也沒有能完全肯定與之形狀相同的立體。但《筭數書》斬都的術文正好對應於本文後面第六節關於《數》0456 簡的復原方案中的分割法（用到壍堵和鱉臑），而且《九章》中關於陽馬和鱉臑的求積問題置於芻甍之前，所以《數》0456 簡的作者應該知道這兩種立體的體積算法。這一點我們可以從《數》中找到間接的證據。

秦簡《數》的 0997 號簡記有一個錐體的體積計算方法：

積隹（錐）者，兩廣相乘也，高乘之，三而一。[14]

整理者指出「隹」通「錐」。這個錐體具體是怎樣的形狀，由於文字的信息不夠，我們還沒有辦法斷定。可以肯定的是它是一個底面爲長方形的四棱錐。如果它是陽馬，則說明《數》的時代已有陽馬這種形體（不一定叫「陽馬」這個名稱）；如果不是陽馬，由於非陽馬的四棱錐更難被拼合成長方體而求得其體積，所以《數》有四棱錐的體積算法，也暗示當時有陽馬的體積算法。事實上，劉徽在給《九章筭術》求方錐（正四棱錐）體積的術文作注時，就通過將它分解爲四個陽馬來論證。可見古人把陽馬當作更基本的立體，是很正常的。因此，既然 0997 簡記有四棱錐（至少是一種特例）的體積算法，我們可以推論《數》0456 簡的作者瞭解陽馬的體積算法。

陽馬由壍堵分解而成，分解的同時得到鱉臑，所以古人肯定會遇到鱉臑，

訓求取，見許道勝，〈嶽麓書院藏秦簡《數》書疑難語詞集釋〉，「簡帛」網，2012.2.2，http://www.bsm.org.cn/show_article.php?id=1629。蕭燦博士告知（2013 年 1 月 27 日電子郵件），據彭浩先生記憶，主張釋為「投」字的是胡平生。從字形看，釋為「投」字似更合理。

12 朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，頁 141。

13 整理者把簡 0977 和 J13 置於不同的位置，簡 J13 置於 0456 簡之後，似不當。兩簡應為前後相續關係，至少都應在 0456 簡之前。

14 朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，頁 140。

並且很容易由塹堵、陽馬的體積相減得到鱉臑的體積。由此可推論《數》的時代也應知道鱉臑體積的算法。加之劉徽《九章筭術注序》說《九章》的主體來源於先秦，[15] 而秦國對需要計算各種形狀立體體積的城池、水利、建築等工程，從計劃到工期都有嚴苛的規定，[16] 因此幾個方面的相互印證可以斷定上述基本立體及其體積算法，在秦和先秦時期早已具備，而以這四種基本立體爲把多面體分割形成的基本單元、用出入相補原理推導多面體求積算法的方式，在秦及先秦時代也已形成。

在有些情形下，把一個有待求積的立體分解成已知體積算法的別的立體時，更容易獲得其體積算法，所以古人當然可能將立體分解成上述四種基本立體以外的立體來求解（仍可能還同時用到基本立體）。但是一方面，古人製作非基本立體的棊要痲煩些；另一方面，中國古代數學家在組織數學知識時，雖然考慮算法之間的聯繫，卻關注得不夠，特別是很少刻意分層次深入揭示算法之間的聯繫，進而盡力建立一個完備的系統，因此，中國古代可能有相當一部分數學家，並不習慣於將有待求積的立體，分解成基本立體以外的立體來求解。上述四種基本立體的模型種類少，且由於是長方體和由之分解而成的立體，用來計算其體積的相關參數就是立體的棱而易於得到，加工起來也相對比較容易，易於批量化製作；再由於這種基本立體容易對接，方便操作，比較好拼合成易於處理的更大一些的基本立體（長方體和塹堵），所以這四種基本立體便成爲古人尋求多面體體積算法時最常用的基本立體。以上述四種基本立體爲分解單元來處理體積問題，在劉徽給《九章》立體問題所作的注中是主要的方式，就能說明這一點。因此，我們對古人獲得算法的可能途徑之推測，仍基於用模型展示將立體分解爲上述四種基本立體的思路。

15 對劉徽記載的解讀參考：郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，頁 98-102；郭書春，〈張蒼與《九章算術》〉，收於劉鈍等主編，《科史薪傳——慶祝杜石然先生從事科學史研究 40 周年學術論文集》（瀋陽：遼寧教育出版社，1997），頁 112-121；鄒大海，《中國數學的興起與先秦數學》，頁 126-161；鄒大海，〈出土簡牘與中國早期數學史〉，《人文與社會學報》2.2(2008.6): 71-98。

16 鄒大海，〈睡虎地秦簡與先秦數學〉，《考古》2005.6: 57-65。

五、劉徽復原方式的局限性

公元三世紀劉徽在給《九章筭術》芻甍術文所作的注釋中，給出了一個針對芻甍的特例情形的推導，相當於在圖五中令 $AB=CD=2$ 尺，$EF=AG=BK=GH=KL=HD=LC=EI=FJ=1$ 尺，I、J 分別是 GK、HL 的中點。他通過將它分割成一些由正方體分割出的壍堵和陽馬後，證明廣爲 2 尺（AB）、袤爲 7 尺（$EF+2AD$）、高爲 1 尺（EI）的長方體，正好包含由 6 個芻甍分割成的小立體之和，從而驗證了《九章》芻甍的體積算法。郭書春參照劉徽驗證芻甍算法的思路，給出了斬都的作者推出斬都體積算法的復原方案，[17] 實際針對的也是斬都的特例情形，相當於令圖四中 $AB=CD=EG=GH=HF=GI=HJ=1$ 尺，$AD=BC=2$ 尺，I、J 分別爲 AD、BC 中點的特殊斬都。由於《數》0456 簡與《筭數書》斬都屬於同一類形體，我們也可以設想古人通過郭書春對斬都算法造術之原的復原，得到 0456 簡的求積方法。不過，上述芻甍和斬都的特例具有對稱性（相當於在圖四中，$EG=HF$，$AI=DI$；在圖五中，$AG=HD$，$GI=KI$），我們前面已證明古人的算法對於對稱和非對稱（相當於在圖四中，$EG\neq HF$、$AI\neq DI$ 至少有一個成立；在圖五中，$AG\neq HD$、$GI\neq KI$ 至少有一個成立）兩種情況都成立。而且原始文獻本身也沒有任何信息表明這些立體是對稱的；[18] 再者，劉徽的特殊芻甍與《九章》原文的芻甍

17 郭書春，〈《筭數書》「斬都」求積公式造術初探〉，《曲阜師範大學學報（自然科學版）》36.3(2010.7): 120-124。郭書春認為劉徽對芻甍的注文「分兩段，其第一段是上述推導《九章筭術》公式的棊驗法，第二段是劉徽自己提出的公式」。他認為「棊驗法要用到三品棊，即長、寬、高均為 1 尺的正方體、壍堵、陽馬」，「棊驗法是《九章筭術》時代推導多面體體積公式的方法」，「《筭數書》在推導多面體體積公式時除了三品棊之外，還用到長、寬、高均為 1 尺的四面皆為勾股形的鱉臑棊」。我們考察劉徽注中幾處「三品棊」、「棊三品」後覺得更大的可能性是「三品」只表示三種之義（李繼閔已作如是理解，見李繼閔，《〈九章算術〉導讀與譯注》，西安：陝西科學技術出版社，1998，頁 437-442、468-479），「三品棊」未必是表示「長、寬、高均為 1 尺的正方體、壍堵、陽馬」的專有名詞。另外，棊驗法固然用長、寬、高為 1 尺的正方體及由之分解成的壍堵、陽馬、鱉臑，但沒有證據表明只限於三度都是 1 尺的情形。

18 古克禮教授已經說到，儘管劉徽把芻甍限定為對稱的屋脊，但《九章》原文並沒有這樣的表示。見：Christopher Cullen, *The Suan Shu Shu* 筭數書 '*Writings on Reckoning*': *A*

的數據比例雖有一定差距，但還不算很大，而郭書春設計的特例情形的斬都，與《筭數書》題設的數據比例則相差太大。因此古人要由特例擴展開來，困難就大得多，從直觀上古人也恐不易接受。所以我們考慮更具普遍性的復原方案，來復原 0456 簡與斬都的造術之原。這個方案的思路與劉徽和郭書春的有相似之處，但利用具有一般性的基本立體作爲分割而成的單元，從而可以同時處理對稱和非對稱、特殊尺寸和一般尺寸的任意情形。雖然劉徽在推演時借用的模型「棊」往往是正方體和由正方體分出的壍堵、陽馬和鱉臑，但這並不意味著古人的模型只限於這種特殊的情形。一則一般尺寸的模型在製作上並不增加多大難度，二則劉徽在《九章》羨除術注中，就意識到這類棊的局限性，在先用這種特殊棊針對非常特殊的情形驗證羨除的求積方法之後，馬上考慮了更一般的情形，其中用到的壍堵、隨方錐、大小鱉臑都不由正方體分解而成；而他在注陽馬術時也提到「其棊或修短，或廣狹，立方不等者，亦割分以爲六鱉臑」，[19] 這說明當時會有長方體及由長方體分解出的棊；而在開立圓術注中，他更是提到曲線形的棊。這些充分說明古人只要有需要，是會去製作一般情形的模型的。因此，下面我們利用一般情形的基本立體之模型，來復原《數》0456 簡中楔形體的求積算法之推導方式。容易看出，這種復原方式也適用於《筭數書》的斬都。

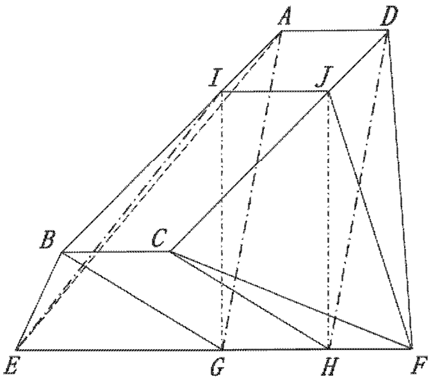
六、對第二節所補《數》0456 簡術文之推導的復原

前面已說到，在推導立體體積算法時，古人常常借助立體模型（棊）進行組合與分解來展示立體之間的關係。本文復原古代的推導，不可能把眞正的立體模型置於論文之中，故用圖形表示立體模型的使用。如圖七，簡文中的立體爲楔形體 *EF-ABCD*，其頂面 *ABCD* 爲長方形，*AD*、*BC* 爲上廣，*EF* 爲下廣（比上廣長），它們互相平行。*AB*、*CD* 爲上袤。過頂面的 *AB*、*CD* 各作一平面與頂面 *ABCD* 垂直，交 *EF* 於點 *G*、*H*，而與立體的截面分別爲三

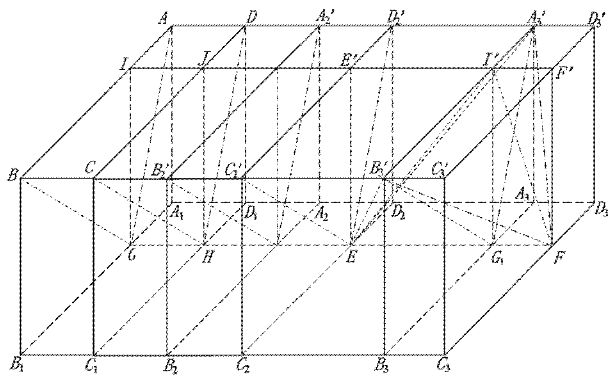
Translation of a Chinese Mathematical Collection of the Second Century BC, with Explanatory Commentary, p. 93.

19 郭書春,《匯校九章筭術》第二版，頁 182-185。

角形 *ABG*、*DCH*。作 *GI*、*HJ* 分別垂直於 *AB*、*CD*，*I*、*J* 爲垂足。那麼 *GI*、*HJ* 垂直於頂面 *ABCD*，它們都是立體 *EF-ABCD* 的高。過 *EF* 和 *IJ* 作一平面切割立體 *EF-ABCD*。這樣，立體 *EF-ABCD* 可以分爲 2 個塹堵 *AGI-DHJ*、*BGI-CHJ* 和 4 個鱉臑 *E-AGI*、*E-BGI*、*F-DHJ*、*F-CHJ*。



圖七



圖八

作長方體 $A_1B_1C_3D_3$-$ABC_3'D_3'$（如圖八），其上下兩面的一組邊（*AB*、$C_3'D_3'$、A_1B_1、C_3D_3）等於楔形體 *EF-ABCD* 的邊 *AB*（袤），另一組邊（A_1D_3、B_1C_3、AD_3'、BC_3'）等於楔形體 *EF-ABCD* 的 *AD*（上廣）的 2 倍與 *EF*（下廣）之和，高（AA_1）也等於楔形體的高 *GI*。

作 4 個同時垂直於側面 $BB_1C_3C_3'$、底面 $A_1B_1C_3D_3$ 的平面，將大長方體 $A_1B_1C_3D_3$-$ABC_3'D_3'$ 分解爲 5 個長方體 $A_1B_1C_1D_1$-$ABCD$、$D_1C_1B_2A_2$-$DCB_2'A_2'$、$A_2B_2C_2D_2$-$A_2'B_2'C_2'D_2'$、$D_2C_2B_3A_3$-$D_2'C_2'B_3'A_3'$、$A_3B_3C_3D_3$-$A_3'B_3'C_3'D_3'$。前三個全等，其廣（B_1C_1、C_1B_2、B_2C_2）都等於楔形體的上廣，後二者的廣（C_2B_3、B_3C_3）分別等於 *EG*、*HF*。又作一個平面 *IGFF'* 與長方體的底面 $A_1B_1C_3D_3$、側面 AA_1B_1B 都垂直，將大長方體 $A_1B_1C_3D_3$-$ABC_3'D_3'$ 以及上述由它分割而成的五個長方體，都分割成袤（$AI=D_3'F'$，$IB=F'C_3'$）分別等於原楔形體中 *AI*、*IB* 的兩個長方體（廣和高與原長方體一樣）。

由長方體 AA_1GI-DD_1HJ、BB_1GI-CC_1HJ 可以各自分割都得到兩個塹堵，前者的一個塹堵 *AGI-DHJ*、後者的一個塹堵 *BGI-CHJ* 分別等於原楔形體 *EF-ABCD* 中塹堵 *AGI-DHJ*、*BGI-CHJ*，那麼這兩個長方體可分別用這兩個塹

堵的 2 倍拼成，因此長方體 $A_1B_1C_1D_1$-$ABCD$ 可以由 2 個壍堵 AGI-DHJ 和 2 個壍堵 BGI-CHJ 拼成。同樣，長方體 $D_1C_1B_2A_2$-$DCB_2'A_2'$和 $A_2B_2C_2D_2$-$A_2'B_2'C_2'D_2'$也都各自可以用 2 個壍堵 AGI-DHJ 和 2 個壍堵 BGI-CHJ 拼成，所以大長方體 $A_1B_1C_2D_2$-$ABC_2'D_2'$可以用 6 個壍堵 AGI-DHJ 和 6 個壍堵 BGI-CHJ 拼成。

長方體 $D_2EE'D_2'$-$A_3G_1I'A_3'$的袤 $A_3'I'$、廣 EG_1、高 G_1I'分別等於鱉臑 E-AGI 的袤 AI、廣 EG、高 GI，所以由它分出的鱉臑 E-$A_3'G_1I'$就等於楔形體中的鱉臑 E-AGI，因此長方體 $D_2EE'D_2'$-$A_3G_1I'A_3'$的體積爲鱉臑 E-AGI 的 6 倍。同樣，長方體 $EC_2C_2'E'$-$G_1B_3B_3'I'$的體積爲原楔形體中的鱉臑 E-BGI 的 6 倍，長方體 $A_3G_1I'A_3'$-$D_3FF'D_3'$爲原楔形體中鱉臑 F-DHJ 的 6 倍，長方體 $G_1B_3B_3'I'$-$FC_3C_3'F'$爲原楔形體中鱉臑 F-CHJ 的 6 倍。因此，長方體 $D_2C_2C_3D_3$-$D_2'C_2'C_3'D_3'$的體積爲原楔形體所分割出的各個鱉臑體積之和的 6 倍。

大長方體 $A_1B_1C_3D_3$-$ABC_3'D_3'$由長方體 $A_1B_1C_2D_2$-$ABC_2'D_2'$和長方體 $D_2C_2C_3D_3$-$D_2'C_2'C_3'D_3'$拼成，所以大長方體 $A_1B_1C_3D_3$-$ABC_3'D_3'$的體積就是原楔形體 EF-$ABCD$ 體積的 6 倍。由此可知，楔形體 EF-$ABCD$ 的體積就等於大長方體體積除以 6，即

$V_{EF\text{-}ABCD}=V_{A_1B_1C_3D_3\text{-}ABC_3'D_3'}\div 6=AD_3'\times AA_1\times AB\div 6=$〔（2 倍上廣＋下廣）×高×袤〕÷6。

上面將需要求積的立體分割成基本立體，再將基本立體按一定的倍數進行組合，以復原古人對求積法的推導，係基於出入相補原理，因爲此原理在先秦時代已經應用，[20] 故無問題。

同樣地，如果把劉徽在「芻甍術」的注中所用的邊長爲 1 尺的正方體所分割成的壍堵、陽馬，改爲一般的長方體及相應的壍堵和陽馬，那麼劉徽的注釋就可以改造爲針對一般尺寸、具有對稱性的芻甍之體積算法的推導。

第四節關於《數》0456 簡的作者已知一般長方體、壍堵、陽馬、鱉臑體積計算方法的推論，還提供了另一種復原古人給出這種楔形體體積算法的可能途徑（不針對《筭數書》斬都的術文），其術文也不再與上述斬都和芻甍的

20 鄒大海，〈從先秦文獻和《算數書》看出入相補原理的早期應用〉，《中國文化研究》2004 冬之卷: 52-60。

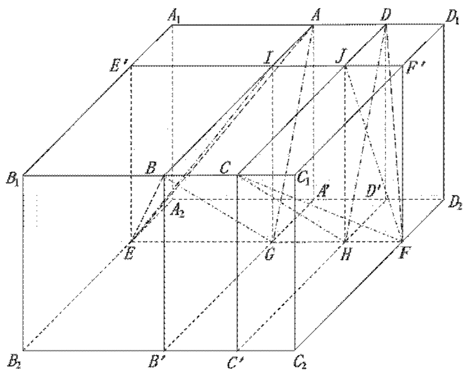
術文相似（用現代數學容易證明它們等價，但計算方式明顯不同）。

七、另一種可能的推導方式和術文

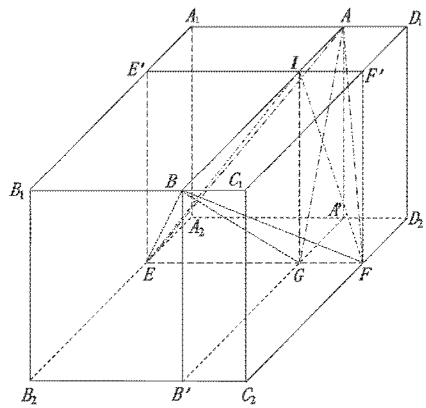
仍如上述情形，先把 *EF-ABCD* 分解爲 2 個壍堵 *AGI-DHJ*、*BGI-CHJ* 和 4 個鱉腝 *E-AGI*、*E-BGI*、*F-DHJ*、*F-CHJ*。

如圖九，用與壍堵 *AGI-DHJ*、*BGI-CHJ* 分別全等的兩個壍堵與它們分別組合成一個長方體 *AIJD-A′GHD′*、*BCJI-B′C′HG*，兩個長方體又組成一個長方體 *ABCD-A′B′C′D′*。那麼原楔形體 *EF-ABCD* 中的兩個壍堵的體積是這個長方體的一半。因此，這部分的體積可以用這樣的術文來表達：「置上廣，以高及袤乘之，二成一」。[21]

作一個與長方體 *ABCD-A′B′C′D′* 的袤和高分別相等、而廣（AA_1、BB_1 等）等於 *EG* 的長方體 ABB_1A_1-$A'B'B_2A_2$ 置於其左側，它包含兩個長方體 $AA_1E'I$-$A'A_2EG$、$E'IBB_1$-$EGB'B_2$。那麼鱉腝 *E-AGI*、*E-BGI* 的長、寬、高分別等於這兩個長方體的長、寬、高，於是這兩個長方體的體積分別是這兩個鱉腝的 6 倍。所以長方體 ABB_1A_1- $A'B'B_2A_2$ 的體積是兩個鱉腝 *E-AGI*、*E-BGI* 體積之和的 6 倍。同樣，在長方體 *ABCD-A′B′C′D′* 右側可構造袤和高與之相等、



圖九



圖十

21 我們這裡力圖用古代的語言描述出與復原方法相對應的術文。因為語言反映思想，能用古人的語言和術語表達出來，會增加這種復原思路符合古人思想的可能性。

而廣等於 HF 的長方體 CDD_1C_1-$C'D'D_2C_2$。那麼，同樣地，這個長方體的體積是鱉腝 F-DHJ、F-CHJ 的體積之和的 6 倍。將長方體 ABB_1A_1-$A'B'B_2A_2$ 和 CDD_1C_1-$C'D'D_2C_2$ 取出可另外拼成一個新的長方體（圖十），其廣為（$EG+HF$），等於原楔形體 EF-$ABCD$ 的上、下廣之差（$EF-BC$），其高、袤與 EF-$ABCD$ 的高、袤分別相同。所以這個長方體的體積是楔形體 EF-$ABCD$ 的 4 個鱉腝體積之和的 6 倍。因此，這 4 個鱉腝的體積之和可以表達為：「以上廣減下廣，以高乘之，有以袤乘之，六成一。」

綜合上述兩部分，術文可以表示為：「以上廣減下廣，以高乘之，有以袤乘之，六成一。有置上廣，以高及袤乘之，二成一。並之，即成。」這相當於公式：

$V_{EF\text{-}ABCD}$＝〔（下廣－上廣）×高×袤〕÷6＋上廣×高×袤÷2。[22]

由於《數》的現存竹簡有四棱錐體積算法，而沒有鱉腝的體積算法，所以 0456 簡的作者也可能不用鱉腝而用陽馬推導其體積。因此，我們還可以提出用長方體、塹堵和陽馬作為基本立體的求體積推導方案（相應的計算方法和術文也不相同）。

八、第三種可能的推導與術文

如圖十一，將上面的長方體 $ABCD$-$A'B'C'D'$向左、向右延伸，分別構造袤和高與之相等的長方體 A_1B_1BA-$A_2B_2B'A'$、CDD_1C_1-$C'D'D_2C_2$，它們的廣（A_1A、DD_1）分別等於 EG、HF。設 IJ 與 A_1B_1、D_1C_1 交於 E'、F'。連結 EA_1、EB_1、EE'、FD_1、FC_1、FF'。那麼三棱柱 EF-$A_1B_1C_1D_1$ 可以分解為兩個塹堵 $EE'B_1$-$FF'C_1$、$EE'A_1$-$FF'D_1$。它們的兩倍可以分別構成長方體 $B_1C_1C_2B_2$-$E'F'FE$、$E'F'FE$-$A_1D_1D_2A_2$，它們合在一起就是長方體 $B_1C_1C_2B_2$-$A_1D_1D_2A_2$，其體積為下廣、上袤和高三者相乘所得的積。三棱柱 EF-$A_1B_1C_1D_1$ 又可以分

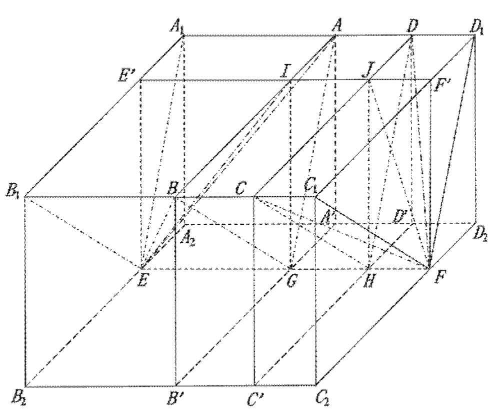
22 整理者畫圖並列出了針對具體數據的算式：「$\frac{1}{2}(20\times66\times64)+2\times\frac{1}{6}〔(\frac{50-20}{2})\times66\times64〕=63360$（立方尺）」（朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，頁 141），與此公式有部分一致。但所畫圖形不是把立體分解為基本立體，而是採用現代思路下的分解方式，同時其算式係針對對稱立體的情形。

解爲楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 和 4 個陽馬 $E\text{-}A_1E'IA$、$E\text{-}B_1E'IB$、$F\text{-}D_1F'JD$、$F\text{-}C_1F'JC$。所以長方體 $B_1C_1C_2B_2\text{-}A_1D_1D_2A_2$ 的體積等於 2 個楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 和 8 個陽馬（即 $E\text{-}A_1E'IA$、$E\text{-}B_1E'IB$、$F\text{-}D_1F'JD$、$F\text{-}C_1F'JC$ 各 2 個）的總體積。由於陽馬 $E\text{-}A_1E'IA$、$E\text{-}B_1E'IB$、$F\text{-}D_1F'JD$、$F\text{-}C_1F'JC$ 之體積分別是長方體 $E'EGI\text{-}A_1A_2A'A$、$B_1B_2B'B\text{-}E'EGI$、$F'FHJ\text{-}D_1D_2D'D$、$C_1C_2C'C\text{-}F'FHJ$ 之體積的三分之一，這 4 個長方體可取出構成一個高、袤與原楔形的高、上袤分別相等，廣爲上、下廣之差的長方體 $B_1B_2A_2A_1\text{-}C_1C_2D_2D_1$，如圖十二。因此，8 個陽馬的體積之和爲長方體 $B_1B_2A_2A_1\text{-}C_1C_2D_2D_1$（圖十二）體積的三分之二。所以 3 個長方體 $B_1C_1C_2B_2\text{-}A_1D_1D_2A_2$（圖十一）的體積等於 6 個楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 的體積與 2 個長方體 $B_1B_2A_2A_1\text{-}C_1C_2D_2D_1$（圖十二）之和。故從 3 個長方體 $B_1C_1C_2B_2\text{-}A_1D_1D_2A_2$（圖十一）的體積中除去 2 個長方體 $B_1B_2A_2A_1\text{-}C_1C_2D_2D_1$（圖十二）的體積，即得到 6 個楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 的總體積。因而，楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 的體積爲：從下廣、上袤和高的乘積之 3 倍中，減去上、下廣之差與上袤及高的乘積之 2 倍，再除以 6。故古人可能把楔形體 $EF\text{-}ABCD$ 的求積算法表示爲術文：

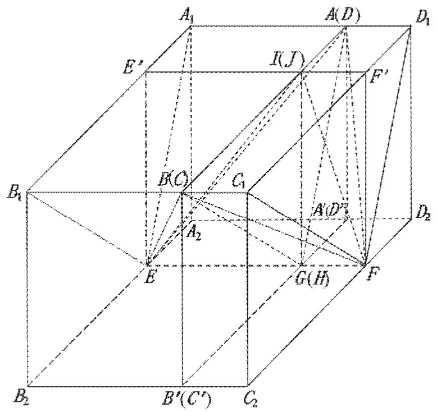
「以上袤乘下廣，以高乘之，有三之。有以上廣減下廣，餘，以高及上袤乘之，有倍之。以減之，六成一。」這相當於公式：

$V_{EF\text{-}ABCD}=$〔下廣×上袤×高×3−（下廣−上廣）×高×上袤×2〕÷6。

類似前面的情況，上面的表述不是術文唯一可能的文字。



圖十一



圖十二

上述三種推導和術文，第一種的外證較多且較充分，在歷史上存在的可能性很大。第三種的內證較多，第二種介於第一、三兩種之間。它們都是合理的推測，從一個思維上的大框架看，雖然一個人可能只有一種思路（但不排除有多種思路的可能性），但在一個歷史時期和一個群體中，這三種推導方案都有可能存在過。

九、以一類楔形體爲例看上古體積算法的產生與傳播

從上面的分析和復原看，上古中國數學家在處理多面體體積計算問題時，以長方體爲體積計算的基礎，以長方體及由之分解而成的塹堵、陽馬和鱉腝爲基本形體。這四種立體各面要麼爲長方形、要麼爲直角三角形，都以各面含有直角爲標誌，這與中國古代重視勾股的一貫思想是一致的。通過將多面體分解爲基本形體，然後將這些基本形體進行重組，或將這些基本形體中的一部分或全部加倍（倍數可同可異）[23] 後進行重組，形成簡單易算的立體來處理。[24] 這四種基本形體分別對應於一般的平行六面體、三棱柱、四棱錐和四面體，後四者看上去也非常簡單而基本，而且可使問題簡化，但由於計算它們的體積所用的參數，在外觀上通常並不很直接（通常不是它們的棱），所以中國古人寧願取參數更明顯、更直接的長方體及相應的塹堵、陽馬和鱉腝爲分割而成的基本形體，使問題易於處理。因此，儘管中國古代在邏輯推理方面的要求和所達到的程度遠不如古希臘，但其求積方法卻很少出現差錯。

現存西漢後期編成本《九章筭術》的芻甍和《筭數書》的斬都之求積方法，具有相同的數學結構，而漢編本《九章》又是以更早時代的版本爲基礎

---

23 古人覺得分數較難處理，提出了各種處理分數的方式。先加倍再做除法以避免分數過早出現，是古人應對可能多次出現分數的一種方式。

24 吳文俊〈出入相補原理〉已經論及，但未注意上古時代有術文對應於形體加倍的情況，也未注意處理立體問題時劉徽與《九章》或他之前的作者存在的差異。郭書春注意到《九章》與劉徽的區別，認為劉徽之前是用形如正方體及由正方體分解成的塹堵、陽馬和鱉腝的四種棊來處理體積問題的，見郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，頁 309-314。我們認為上古時代會用這種特殊尺寸的棊，但不會限於這種棊。

進行刪補重編而成的，這說明芻甍這種立體及其求積法的首先出現不一定是《九章》的編定時代，而有可能不晚於西漢初年。秦簡《數》0456 簡所描述的立體又與斬都具有相同的幾何結構，則說明斬都及其求積法的產生年代肯定不晚於秦代。這些立體的求積方法在數學結構上的相似性，說明它們在數理上有共同的基因。另一方面，三種立體的名稱不同（至少有兩個名稱，極可能是三個），其現實原型存在差異，它們的具體數據完全不同，而術文特別是術語也有一些差異。因此，它們在數理上的共同基因說明它們有著共同的淵源，且處於戰國或更早的時代，只有這樣才能有時間傳布開來，在不同的空間和場合中發揮作用而形成同異互見的多種問題和表述方式。《數》0456 簡的立體，雖然很可能與斬都的算法相同，但由於術文沒有關鍵的文字保存下來，所以也不排除其他的可能。不管怎樣，芻甍和斬都的求積算法具有相同的數學結構，這意味著古人在推導過程中，除分割兩者所得的基本形體時前者含有陽馬、後者含鱉腝這樣的區別外，它們在其他的方面共性居多，如兩個推導所構造的都是一個寬、高分別與原楔形體相等，長為原楔形體底（頂）面長的 2 倍與其平行棱之和，而體積為原楔形體體積 6 倍的長方體。

《筭數書》和《數》是兩部與下層官吏的需要相適應，結合社會經濟實際的數學著作。這類材料當時應該很多，其在數據和具體表達上的差異可大可小，但其核心的數學思想和數學結構大同小異。因此，就每一項材料而言，其中核心的數學方法是該書編著者首創的可能性很小。另一方面，《九章筭術》及其祖本從周代至西漢後期，雖受其他因素和文獻的影響而一直處於變動之中，但作為一部系統的、有很長歷史淵源的經典數學著作，它對其他著作的影響，很可能遠比在其他著作中隨機取的一部對它的影響要大。[25] 因此，儘管《九章》的芻甍這個題目比《筭數書》和《數》中的這兩個題目既可能早、也可能晚，但在比後兩書都早的秦代或先秦時期，存在某一個《九章》祖本記有這類楔形體之求積算法的可能性，卻是比較大的。

中國早期算書中很少記載算法的形成過程，本文所論的三個問題也是如

25 參考鄒大海，〈從《算數書》與《九章算術》的關係看算法式數學文獻在上古時代的流傳〉，《贛南師範學院學報》2004.6: 6-10；鄒大海，〈出土簡牘與中國早期數學史〉，《人文與社會學報》2.2(2008.6): 71-98。

此。這些算書不載算法形成過程的原因很難論定。一個共同的原因可能是算法產生以後，可以依樣畫葫蘆，解決相關的實際問題。而算書的編撰目的既已達到，算法的推導過程就顯得不那麼重要了。就立體問題而言，求積算法的推導在當時主要是借助立體模型做立體的分解和組合來進行的，這種操作可以比較容易地、直觀地表現形體之間的關係，但由於古代絕大多數情形下用竹簡書寫，要畫複雜的立體圖形難度比較大。即使有昂貴的布帛來書寫和繪圖，由於立體圖的繪製本身在古代難度大，而單憑文字表述又很困難，[26] 所以在並非很必要的情形下，上古算書的著者和抄寫者，很可能寧願不記錄算法的推導過程。因此，作為下層官吏平時使用的算書沒有推導，是很自然的。這些算書不記錄推導，並不妨礙我們推斷古人曾用模型展現立體的分割與重組來推導立體體積的求法。另外，在數學知識的傳播過程中，除了形諸文字的書籍和文章，還存在著一個非文字的途徑，有些數學知識特別是關於實際操作（如算籌的擺放和運算，立體模型的使用等）的知識，很可能通過師徒之間口耳相授和操作示範的方式流傳，也可能通過學者個體之間有意的交流乃至無意的接觸，而在一定範圍內傳播，在流傳過程中得到繼承、改變和發展，形成有同有異的知識和問題。本文所討論的上古算書中的三個體積問題，就是經過這種過程的結果。

十、結　語

本文通過分析《數》0456 簡的楔形體與《筭數書》的斬都、《九章筭術》的芻甍在文本、形態上的共性與差異，以及後兩個楔形體在文本、形態和算法上的同異，證明古人曾就前者提出過與斬都的差異甚小的算法和術文。斬都和芻甍的複雜性與其算法的正確性，說明古人主要不是通過直觀和猜測，而是通過推導得到其算法的。結合《九章》中有關立體的類型和劉徽注的處理多面體體積的方式，分析《數》和《筭數書》中有關的信息，可知用長方體（而不僅僅是正方體）及由其分割而成的一般尺寸的壍堵、陽馬和鱉腝作

26 劉徽努力呈現算法的來源與推導，但其《九章筭術注》沒有圖保存至今，所以史家對其中很多細節（有時甚至是關鍵之處），就容易有不同的理解。

爲基本立體進行出入相補，是先秦至漢代處理多面體體積問題的常用方式。基於這種方式，本文針對《數》0456 簡中楔形體問題佚失的術文，將算法推導和文本表述結合起來，提出了幾種可能的方案。存在不同的可能方案，不僅反映了現存材料對復原方案的限定性不夠，而且也說明在一個思維上的大框架下，一個歷史時期不同地域或知識背景的學者，採用同異互見的不同方案解決相似問題的可能性。本文進一步證明，三種算書中的立體在算法上很可能具有非常相似的數學結構，這說明它們的算法在更早的先秦時代有著共同的淵源。這些算法上的共同基因通過形諸文字的方式、非文字方式（如口耳相傳、實際操作等）或兩者結合的方式傳播，在不同的地域和場合中發揮作用，形成了同、異程度不同的很多問題和算法。本文所討論的三條文獻及相應的問題和算法，只是其中有幸保存至今的幾個樣本而已。

引用書目

一、傳統文獻

郭書春匯校，《匯校九章筭術》第二版，瀋陽：遼寧教育出版社，2004。

張家山二四七號漢墓竹簡整理小組編著，《張家山漢墓竹簡（二四七號墓）》（釋文修訂本），北京：文物出版社，2006。

朱漢民、陳松長主編，《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，上海：上海辭書出版社，2011。

二、近人論著

吳文俊　1978　〈出入相補原理〉，《中國古代科技成就》，北京：中國青年出版社，頁 80-100。

李繼閔　1998　《〈九章算術〉導讀與譯注》，西安：陝西科學技術出版社。

許道勝　2012　〈嶽麓書院藏秦簡《數》書疑難語詞集釋〉，「簡帛」網，2012.2.2，http://www.bsm.org.cn/show_article.php?id=1629。

郭書春　1992　《古代世界數學泰斗劉徽》，濟南：山東科學技術出版社。

郭書春　1997　〈張蒼與《九章算術》〉，收於劉鈍等主編，《科史薪傳——慶祝杜石然先生從事科學史研究 40 周年學術論文集》，瀋陽：遼寧教育出版社，頁 112-121。

郭書春　2010　〈《筭數書》「𨐨都」求積公式造術初探〉，《曲阜師範大學學報（自然科學版）》36.3(2010.7): 120-124。

陳良佐　2009　〈《筭數書》中體積問題與中國古代體積理論的四個基本原理〉，「臺灣數學博物館」網站／數學史特區／《筭數書》，2009.9.10，http://museum.math.ntnu.edu.tw/fulltext/251_20090910231440.pdf。

鄒大海　2001　《中國數學的興起與先秦數學》，石家莊：河北科學技術出版社。

鄒大海　2001　〈墨家名家的不可分量思想與運動觀〉，《漢學研究》19.1(2001.6): 47-75。

鄒大海　2004　〈從先秦文獻和《算數書》看出入相補原理的早期應用〉，《中國文化研究》2004冬之卷: 52-60。

鄒大海　2004　〈從《算數書》與《九章算術》的關係看算法式數學文獻在上古時代的流傳〉，《贛南師範學院學報》2004.6(2004.12): 6-10。

鄒大海　2005　〈睡虎地秦簡與先秦數學〉，《考古》2005.6(2005.6): 57-65。

鄒大海　2008　〈出土簡牘與中國早期數學史〉，《人文與社會學報》2.2(2008.6): 71-98。

錢寶琮主編　1981　《中國數學史》，北京：科學出版社。

Dauben, Joseph W. 2008. "算數書 *Suan Shu Shu*, A Book on Numbers and Computations, English Translation with Commentary." *Archive for History of Exact Sciences*, 62. 2 (2008.3): 91-178.

Cullen, Christopher. 2004. *The Suan Shu Shu* 筭數書 '*Writings on Reckoning*': *A Translation of a Chinese Mathematical Collection of the Second Century BC, with Explanatory Commentary*. Cambridge: Needham Research Institute Working Papers, No. 1.

The Method for Finding the Volume of a Set of Wedges in *Shu*, *Suanshu Shu* and *Jiuzhang Suanshu*: With a Discussion of Some Characteristics of the Methods for Calculating Solid Volumes in Early China

Zou Dahai*

Abstract

This paper compares methods for calculating the volume of a particular type of wedge-shaped solid described in the Qin dynasty bamboo-slip manuscript *Shu* (數 Numbers), the Western Han dynasty bamboo-slip manuscript *Suanshu shu* (筭數書 Book on Calculations), and the *Jiuzhang suanshu* (九章筭術 Nine Chapters on Mathematical Procedures), and identifies the relation between them. The text of *Shu* provides new evidence to support the opinion that four basic solids, the cuboid, *qiandu* (壍堵 right triangular prism), *yangma* (陽馬 right rectangular-based pyramid), and *bienao* (鱉臑 tetrahedron with four right triangle faces) were used to determine solid volumes in the Qin and pre-Qin periods. Based on the above, this paper sets out a design that supplements the text in *Shu* to describe a mathematical method for finding the volume of a wedge. It reasons that the method for calculating the volume of the solid described on bamboo strip no. 0456 was found by mathematical derivation, and then attempts to reconstruct how the ancients obtained this method. Drawing on the concepts of evolution and genes from biology, this paper argues that the mathematical methods set out in

* Zou Dahai is a research professor in the Institute for the History of Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences.

the three sources have common characteristics and thus share the same origin. That common origin might have been transmitted and incorporated into an ancestor of the *Jiuzhang suanshu* that predates the other two documents. This paper also proposes a new understanding of how the methods for finding solid volumes were worked out and then transmitted throughout early China.

Keywords: *Shu* 數 on Qin dynasty bamboo slips, *Suanshu shu* 筭數書 on Han dynasty bamboo slips, *Jiuzhang suanshu* 九章筭術, Liu Hui 劉徽, wedge solids, evolution of mathematical methods