探討剩餘價值及允許缺貨的非即時損耗性商品之生產策略

Production Policies for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Salvage Value and Shortage

莊鎧溫[1] 蔡榆瑾[2] 劉惠雯[3]

(Received: Jul. 20, 2011；First Revision: Nov. 16, 2011；Accepted: Dec. 01, 2011)

摘要

本研究建立考慮商品在非即時損耗的條件下，是具有剩餘價值且允許缺貨之存貨模型。在商品非即時損耗、剩餘價值且允許缺貨的情況下，假設需求率和損耗率為固定常數而生產率則與時間呈線性函數變化，且將損耗率假設為兩階段的變化。本研究先假設商品在存貨開始階段不會有損耗情形的發生，經過一段時間後，商品則才會產生損耗且損耗率為一個固定常數。而商品損耗在開始階段是具有剩餘價值，但過了某個時間點之後損耗商品就會產生額外的處理成本。本研究在求解過程中所建立的數理存貨模型是以傳統的最佳化理論以求出存貨相關總成本為最小值，目的是將所建立之存貨模型找出最適當的存貨策略。

關鍵詞：損耗性商品、剩餘價值、固定需求

Abstract

In this study, we want to establish an inventory model for non-instantaneous deteriorating items with allowable salvage value and shortage. Under the conditions of non-instantaneous deteriorating items and salvage value and shortage, the constant demand rate and deterioration rate and production rate linearly, we assume that the deterioration rate is divided into two stages. Beginning the model, the goods won't deteriorate in this period, but after a constant time, the goods is starting to deteriorate as a constant rate. The optimal solution procedures for the present problems are provided. Numerical examples are presented to illustrate the models .

Keywords: Deteriorating Items、Salvage Value、Constant Demand

1. 緒論

近來，市場環境競爭激烈，導致公司必須降低成本與售價以增強自身的競爭能力，

[1]南華大學旅遊管理學系助理教授
[2]霖宏科技股份有限公司
[3]鳴遠興業有限公司

因此，有許多供應鏈管理的研究產生，其主要目的為使整體供應鏈流程更加順暢以降低成本的支出，其中存貨方面的研究主要是整合了製造商、零售商等的存貨策略，以達到存貨成本最佳化。倘若能有效的控制存貨，將能使成本降低，因為存貨是一項具有經濟價值的閒置資源，存在的原因不外乎需求的不確定或管理不當及防止缺貨等因素，且不當的存貨管理恐造成存貨不足或過剩的問題而導致銷貨的損失或造成顧客的不滿而流失顧客，漸而影響企業的營運。因此，建立一套良好的存貨管理系統，是讓企業具有競爭力且不可或缺的重要因素。

由於存貨管理問題探討的因素很多，根據 Silver(1981)提出有關存貨的分類方式是指單一生產項目或多種生產項目，是為確定性需求或機率性需求，存貨的週期性是單期或多期且參數是穩定或因時間的變動而有所改變，考慮供貨過程的特性，當發生缺貨情況時，是延期交貨或失去訂單，如何取得成本的結構與對儲存期限之考慮。而另一學者 Raafat(1991)提出存貨的分類，考慮到存貨是單一或多樣項目有無考慮前置時間，確定性或機率性需求，當需求變化所遵循之方式的模式，存貨的期間為單一期間或多個期間模式，其模式是採購模式或生產模式，有無考慮數量折扣，商品允許缺貨或不允許缺貨與損耗率的變化方式之模式的考慮。在存貨的過程中，大多數的物品均會有損耗的情形發生，而所謂的損耗指的是物品無法在正常的情況下去執行原有的功能，這樣的現象我們稱之為損耗性存貨，帶來的影響會造成存貨量除了需求因素的耗用外也會因為損耗情形的發生而導致存貨庫存的減少。在損耗的特性上，根據 Ghare & Schrade(1963)的研究指出，損耗情形可分為三種形況：直接損耗、實質消耗與退化情形的發生。Wee (1999) 亦發展出需求為銷售價格的線性函數、產品的退化服從 Weibull 分配且允許缺貨部分欠撥的存貨模型。Wu、Ouyang 與 Yang(2006)提出二階段損耗性商品的存貨模型，並探討缺貨的情況。

本研究先假設商品在存貨開始階段不會有損耗情形的發生，經過一段時間後，商品才會產生損耗且損耗率為一個固定常數。而商品損耗在開始階段是具有剩餘價值，但過了某個時間點之後損耗商品就會產生額外的處理成本。在求解過程中所建立的數理存貨模型是以傳統的最佳化理論以求出存貨相關總成本為最小值，目的是將所建立之存貨模型找出最適當的存貨策略。

2. 基本假設與符號說明

為了便於存貨模式的建立，本研究使用下列的符號與假設:

符號

P	生產率
D	需求率
θ	損耗率
$I(t)$	在時點 t 時的存貨水準
$I_i(t)$	商品在時點 t 時之存貨水準，$i = 1,2,3,4$
I_{max}	最大的存貨數量

T　一個生產週期時間長度，即 T = T1+T2+T3+T4
T1　停止生產之時點
ta　商品開始發生損號的時點
t2　商品損耗具有殘值的時點
T2　商品存貨降至零點的時點
T3　商品缺貨累積至最大數量，又開始恢復生產之時點
T4　缺貨商品補足之時點
c1　訂購成本($/次)
c2　持有成本($/unit)
c3　缺貨成本($/unit)
c4　商品單位成本($/unit)
c5　損耗商品處理成本($/unit)
cr　剩餘價值
OC　一個週期內商品之訂購成本
HC　一個週期內商品之持有成本
SV　一個週期內商品損耗具有剩餘價值
DC　一個週期內商品損耗之處理成本
SC　一個週期內商品之缺貨成本
TVC　一個週期內單位時間的平均成本

假設

1. 需求為已知固定常數。
2. 在 t2 之前損耗商品具有剩餘價值，t2 之後則有處理成本。
3. 探討單一產品在固定期間之存貨情形。
4. 在 td 之前商品無損耗情形發生，而在 td 之後商品則開始損耗，且假設損耗率 θ 為一固定函數($0 \leqq \theta \leqq 1$)。
5. 剩餘價值 t2 的時間點小於 td 開始損耗時間點。
6. 各種成本為已知常數。
7. 在生產週期的期初有訂購成本 OC。

3. 模型建立

首先，根據本研究之假設，描繪出商品存貨水準與時間之關係圖，如圖 1 所示。

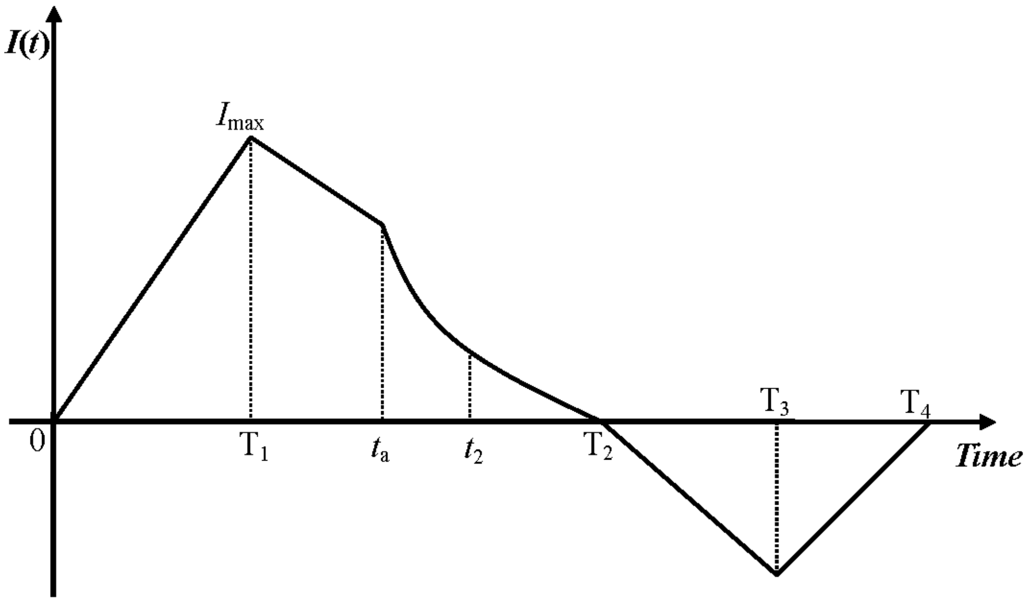

圖 1 存貨水準與時間之關係圖

在時間[0,T4]期間之存貨水準，可以使用下列方程式描述

$$\frac{dI_1(t)}{dt}=(\alpha+\beta t)-D \qquad 0\leqq t\leqq T_1 \qquad (3.1)$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt}=-D \qquad T_1\leqq t\leqq t_a \qquad (3.2)$$

$$\frac{dI_3(t)}{dt}=-D-\theta I(t) \qquad t_a\leqq t\leqq T_2 \qquad (3.3)$$

$$\frac{dI_4(t)}{dt}=-D \qquad T_2\leqq t\leqq T_3 \qquad (3.4)$$

$$\frac{dI_5(t)}{dt}=(\alpha+\beta t)-D \qquad T_3\leqq t\leqq T_4 \qquad (3.5)$$

代入其邊界條件 I1(0)=0，I2(T1)= Imax，I3(T2)= 0，I4(T2)=0，I5(T4)=0，後解微分方程式可得

$$I_1(t)=\frac{1}{2}t(2\alpha+t\beta-2D) \qquad 0\leqq t\leqq T_1 \qquad (3.6)$$

$$I_2(t)=I_{\max}+D(-t+T_1) \qquad T_1\leqq t\leqq t_a \qquad (3.7)$$

$$I_3(t)=\frac{(-1+e^{\theta(-t+T_2)})D}{\theta} \qquad t_a\leqq t\leqq T_2 \qquad (3.8)$$

$$I_4(t)=D(-t+T_2) \qquad T_2\leqq t\leqq T_3 \qquad (3.9)$$

$$I_5(t)=\frac{1}{2}(t-T_4)(2\alpha+t\beta-2D+\beta T_4) \qquad T_3\leqq t\leqq T_4 \qquad (3.10)$$

當 t = ta 時 I2(ta) = I3(ta)，代入公式(2.2)、(2.3)可求得最大存貨水準 Imax

$$I_{\max}=\frac{1}{2}T_1(2\alpha-2D+\beta T_1) \tag{3.11}$$

接著，各項商品相關之成本如下：

訂購成本(OC)：

$$OC=c_1 \tag{3.12}$$

持有成本(HC)：

$$HC=c_2\left(\int_0^{T_1}\begin{array}{l}(\frac{1}{2}t(2\alpha+t\beta-2D)dt+\int_{T_1}^{t_a}(I_{\max}+D(-t+T_1))dt)+\\ \int_{t_a}^{T_2}(\frac{(-1+e^{\theta(-t+T_2)})D}{\theta})dt\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{6\theta^2}c_2\left(\begin{array}{l}\theta^2T_1(3t_a(2\alpha+\beta T_1)-T_1(3\alpha+2\beta T_1))+D(6(-1+e^{\theta(-t_a+T_2)})-\\ 3\theta(t_a(-2+\theta t_a)+2T_2))\end{array}\right) \tag{3.13}$$

商品損耗剩餘價值(SV)：

從 ta 開始有商品損耗的情形發生，ta 至 t2 期間此階段退化商品具有剩餘價值為

$$SV=c_r\left(\frac{(-1+e^{\theta(-t_a+T_2)})D}{\theta}-\frac{(-1+e^{\theta(-t_2+T_2)})D}{\theta}-\int_{t_a}^{t_2}(D)dt\right)$$

$$=\frac{c_rD(-e^{\theta(-t_2+T_2)}+e^{\theta(-t_a+T_2)}-\theta t_2+\theta t_a)}{\theta} \tag{3.14}$$

商品損耗處理成本(DC)：

商品損耗至 t2 到 T2 階段時，有處理損耗商品之成本為

$$DC=(c_4+c_5)\left(\frac{(-1+e^{\theta(-t_2+T_2)})D}{\theta}-\int_{t_2}^{T_2}(D)dt\right)$$

$$=\frac{(c_4+c_5)D(-1+e^{\theta(-t_2+T_2)}+\theta t_2-\theta T_2)}{\theta} \tag{3.15}$$

缺貨成本(SC)：

$$SC=-\left(c_3(\int_{T_2}^{T_3}(D(-t+T_2))dt+\int_{T_3}^{T_4}(\frac{1}{2}(t-T_4)(2\alpha+t\beta-2D+\beta T_4))dt)\right)$$

$$=\frac{1}{6}c_3\Big(3D(T_2-T_4)(T_2-2T_3+T_4)+(T_3-T_4)^2(3\alpha+\beta T_3+2\beta T_4)\Big) \tag{3.16}$$

因此，一生產週期內，每單位時間之平均存貨相關成本為：

平均總成本=(訂購成本+ 持有成本+ 商品退化剩餘價值+ 商品退化處理成本+ 缺貨成本)/生產週期長度

TVC = (OC + HC+ SV +DC + SC)/ T4

$$TVC=\frac{1}{T_4}\left(\begin{aligned}
&c_1+c_r\Big(-\frac{(-1+e^{\theta(-t_2+T_2)})D}{\theta}+\frac{(-1+e^{\theta(-t_a+T_2)})D}{\theta}-D(t_2-t_a)\Big)+\\
&(c_4+c_5)\Big(\frac{(-1+e^{\theta(-t_2+T_2)})D}{\theta}-D(-t_2+T_2)\Big)+\\
&c_2\Big(-\frac{1}{2}Dt_a^2+\frac{\alpha t_a(-\alpha\theta+\sqrt{\alpha^2\theta^2-2\beta\theta D+2e^{\theta(-t_a+T_2)}\beta\theta D+2\beta\theta^2Dt_a})}{\beta\theta}-\\
&\frac{\alpha(-\alpha\theta+\sqrt{\alpha^2\theta^2-2\beta\theta D+2e^{\theta(-t_a+T_2)}\beta\theta D+2\beta\theta^2Dt_a})^2}{2\beta^2\theta^2}+\\
&\frac{t_a(-\alpha\theta+\sqrt{\alpha^2\theta^2-2\beta\theta D+2e^{\theta(-t_a+T_2)}\beta\theta D+2\beta\theta^2Dt_a})^2}{2\beta\theta^2}-\\
&\frac{(-\alpha\theta+\sqrt{\alpha^2\theta^2-2\beta\theta D+2e^{\theta(-t_a+T_2)}\beta\theta D+2\beta\theta^2Dt_a})^3}{3\beta^2\theta^3}+\\
&\frac{D(-1+e^{\theta(-t_a+T_2)}+\theta t_a-\theta T_2)}{\theta^2}\Big)-c_3\Big(-\frac{1}{2}DT_2^2-\frac{\alpha T_4^2}{2}+\frac{1}{2}DT_4^2-\frac{\beta T_4^3}{3}+\\
&\frac{DT_2(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})}{\beta}+\\
&\frac{\alpha T_4(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})}{\beta}-\\
&\frac{DT_4(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})}{\beta}+\\
&\frac{1}{2}T_4^2(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})-\\
&\frac{\alpha(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})^2}{2\beta^2}-\\
&\frac{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta DT_2+2\alpha\beta T_4-2\beta DT_4+\beta^2T_4^2})^3}{6\beta^2}\Big)
\end{aligned}\right) \tag{3.17}$$

由(3.17)式可得知，目標函數有四個決策變數(T1,T2,T3,T4)，為了便於分析，利用(3.7)、(3.8)和(3.9)、(3.10)式，找出 T1,T2,T3,T4 四個決策變數間的關係，並將平均成本函數簡化成兩個時間變數的函數。所以，由(3.7)、(3.8)式，可以得到 T1 和 T2 的關係式：

$$T_1 = \frac{-\alpha\theta + \sqrt{\alpha^2\theta^2 - 2\beta\theta D + 2e^{\theta(-t_a+T_2)}\beta\theta D + 2\beta\theta^2 D t_a}}{\beta\theta} \tag{3.18}$$

又由(2.9)、(2.10)式，得到 T2、T3 和 T4 的關係式：

$$T_3 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta D T_2 + 2\alpha\beta T_4 - 2\beta D T_4 + \beta^2 T_4^2}}{\beta} \tag{3.19}$$

將(3.18)和(3.19)式代入(3.17)式中，就可得知一個週期內單位時間平均的成本函數 TVC(T2, T4)。本研究之目的在求得最佳的 T2 和 T4 值(分別記作 T_2^* 和 T_4^*)，以使得平均總成本函數(TVC)有最小值。

因此，將平均總成本函數 TVC(T2, T4)分別對 T2 和 T4 進行一階微分，並令其結果等於零。即：

$$\frac{\partial TVC}{\partial T_2} = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial TVC}{\partial T_4} = 0 \tag{3.21}$$

為了確認所求得的解為最佳解，對 TVC(T2)和 TVC(T4)進行二次微分，並代入 T_2^* 和 T_4^*，其結果若滿足下列條件，則可確定 TVC(T_2^* 和 T_4^*)為最小化之總平均成本，即：

$$\left.\frac{\partial TVC}{\partial T_2^{\,2}}\right|_{(T_2^*,T_4^*)} > 0 \tag{3.22}$$

$$\left.\frac{\partial TVC}{\partial T_4^{\,2}}\right|_{(T_2^*,T_4^*)} > 0 \tag{3.23}$$

$$\left.\left(\frac{\partial_2 TVC}{\partial T_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 TVC}{\partial T_4^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 TVC}{\partial T_2^2 T_4^2}\right)^2\right|_{(T_2^*,T_4^*)} > 0 \tag{3.24}$$

建立一套演算法來求得原問題之最適訂購策略。首先，對(3.20)和(3.21)式求出 T2 和 T4 值，接著依照下列算式步驟以求得最佳之總平均成本。

演算法

步驟 1：

將所有參數值代入(3.20)與(3.21)式中，以求出(T_2^*,T_4^*)。

步驟 2：

將所有參數值和步驟 1 所求得的(T_2^*,T_4^*)之值，代入(3.18)與(3.19)式，以求出(T_1^*,T_3^*)。

步驟 3：

將所有參數值及(T_2^*,T_4^*,T_1^*,T_3^*)之值代入(2.17)式，求得最佳之平均成本 TVC*。

4. 數值範例

本研究所假設之相關參數值如下：訂購成本(c1) = 200，持有存貨成本(c2) = 2，剩餘價值(cr) = 21，商品單位成本(c4) = 10，損耗商品處理成本(c5) = 5，缺貨成本(c3) = 30，α= 3000，β= 4，開始損耗時間(ta) = 60/365，商品損耗具有剩餘價值時間(t2) = 90/365，生產率(P) = 3000，需求率(D) = 1000，退化率(θ) = 0.1。將以上參數值代入(2.20)和(2.21)式後可求得(T_2^*,T_4^*) = (0.001009 , 0.144991)，接著將(T_2^*,T_4^*)值代入(2.18)和(2.19)式可求出(T_1^*,T_3^*) = (0.000779 , 0.144991)，最後將(T_2^*,T_4^*,T_1^*,T_3^*)代入(2.17)式，可求得此存貨模型之最佳平均總成本 TVC*= 2879.81。

為再次確認所求得之值為最佳解，將 TVC(T2, T4)分別對 T2 和 T4 進行二次微分，其結果證明大於零，因此可以確定所求得的解為最佳解。由此得知，最佳的生產停止時點為T_1^* = 0.000779 單位時間，最佳的缺貨起始時點為T_2^* = 0.001009 單位時間，最佳的再開始生產時點為T_3^* = 0.144991 單位時間，最佳的生產週期為T_4^* = 0.144991 單位時間及最小平均成本 TVC*= 2879.81。

5. 結論與建議

企業生產製造商品與市場需求有關，當需求增加時生產數量就會提高，相對的，需求降低時生產的數量也會減少。如此一來，控制好生產和庫存的數量以減少資源成本的浪費和避免造成顧客不願意等待的銷售損失。在本研究中，探討了生產與時間呈線性函

數之商品在非即時損耗的條件下仍具有剩餘價值且考慮允許缺貨的存貨模型。在實務上，極大部分商品皆是生產完經過一段時間後才有損耗的情形發生，而在商品損耗初期，商品本身還是具有剩餘價值，廠商可以以較低的價格出售以獲得收益，但過了某個時點之後損耗商品則就無法販售，廠商反而必須支付額外的處理成本，且本文也加入了允許缺貨的概念以更符合實務上的需求。透過本研究求解後結果，可以得知最佳平均總成本及每個時點適當的供需時間，以利企業了解何時生產以降低商品的損耗且不至於讓顧客流失，達到最佳的存貨管理。

本研究在探討的過程中，在一開始有進行些先決條件之假設，但現實生活中顧客等待欠撥也許會因時間的增加，使得顧客不願意等待而造成顧客的流失，導致企業的銷售損失，生產率有可能會隨著存貨水準變化，且需求率也有可能會隨價格、時間等有著不同的變化之重要參數皆是往後的存貨模型可以再加以詳細探討，以更貼近實務需求。

参考文獻

1. Ghare, P.M. and G. F. Schrader (1963), "A Model for an Exponentially Decaying Inventory,"*Journal of Industrial Engineering*, 14, pp.238-243.
2. Raafat, F.,(1991) "Survey of Literature on Continuously Deteriorating, Inventory Models,"*Journal of Operational Research Society*, 42(1), pp.27-37.
3. Silver, E. A. (1981), "Operations Research in Inventory Management: a review and critique,"*Operations Research* , 29(4), pp.628-645.
4. Wee, H. M. (1999),"Deteriorating Inventory Model with Quantity Discount, Pricing and Partial Backorder",*International Journal of Production Econmics*, 59, pp.511-518.
5. Wu K.S., L. Y. Ouyang and C. T. Yand (2006), "An Optimal Replenishment Policy for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Stock-Dependent Demand and Partial Backlogging," *International Journal Production Economics*, 101, pp.369-384.