中華管理學報　第四卷　第二期　第 1-18 頁　民國九十二年

基於模糊層級分析觀念及距離法模糊數排序評估武器系統

鄭景俗 [1]　廖述賢 [2]　張自立 [2]

[1] 國立雲林科技大學資訊管理系所　雲林縣斗六市大學路三段 123 號
Tel: 05-5342601 ext5302　Fax: 05-5312077
E-mail: chcheng@yuntech.edu.tw

[2] 國防大學國防管理學院資源管理研究所　中和郵政 90046 附 17 號信箱
Tel: 02-22222137 ext8557　Fax: 02-22250488
E-mail: michael@rs590.ndmc.edu.tw

摘　要

武器系統效能評估是屬於多屬性決策問題，一般對武器系統的描述及評判準則通常以語詞描述，因此語意不明及模糊不清的，且傳統的層級分析法主要是以不對稱的衡量尺度應用在明確（非模糊）的決策上，無法涵蓋決策者選擇武器系統時所表現的主觀性及模糊性。為了克服這些問題，本研究提出以模糊層級分析架構觀念，並且運用中心點距離法及變異係數來實施模糊數排序，首先，由武器系統性能規格資料及專家的意見來建立武器系統所有次項目評判準則之隸屬函數，當隸屬函數建立後，利用武器系統性能規格資料，可計算出各屬性之隸屬值來表示效能分數，因此，可以依效能總值來建立模糊評判矩陣，再運用模糊數排序法－模糊數原點至中心點之距離法及變異係數觀念，來評選最適方案。最後以新一代戰鬥機系統評選實例來說明評估的過程。

關鍵詞：*模糊多屬性決策、模糊數、層級分析法、模糊數排序、中心點距離法、變異係數*

A Fuzzy Numbers of Distance Methods for Evaluating Ranking Problem on Weapon Systems

Ching-Hsue Cheng[1]　Shu-Hsien Liao[2]　Tsi-Li Chang[2]

[1] Department of Information Management, National Yunlin University of Science and Technology
[2] Graduate School of Resource Management, National Defense University

Abstract

The performance evaluation of weapon systems is multiple attribute decision-making problems. The descriptions and judgements on weapon systems are usually linguistic and fuzzy. The traditional method of Analytic Hierarchy Process(AHP), not covering subjectivity and fuzziness of the decision maker on selecting weapon system problems, are mainly used in crisp(non-fuzzy)decision application with a very unbalance scale of judgments. To overcome these problems, in this paper, we will propose a new and general decision making method for evaluating weapon systems using concept of fuzzy hierarchy analytic framework and for fuzzy numbers ranking by central point distance method and the coefficient of variation. First of all, from specification data of weapon systems and the opinions of many experts, we will build a membership function of judgement criteria for all sub-items of weapon systems. When the membership function is built, we can calculate the grade value by specification data of weapon systems to represent performance score. Therefore, we can establish the total fuzzy judgement matrix by total performance score, then using distance index and CV concept to compare fuzzy numbers ordering, and obtaining optimal alternative. At last, we use the choice of a new generation military fighter as an example to illustrate our evaluative process.

Keywords: *Fuzzy Numbers, Fuzzy Ranking, Distance Method, Analytic Hierarchy Process*

一、前言

層級分析法（Analytic Hierarchy Process，簡稱 AHP）[3]為 Saaty 於 1971 年所提出的一套決策方法，主要應用在不確定情況及多屬性決策問題上。自 AHP 法發展以來，已廣泛應用於各領域。AHP 法解決決策的問題，係先剖析問題的準則，以層級方式列出，由上而下利用因素間兩兩比較的觀念，建立評判矩陣並解其特徵向量，再疊加組合，求出最後備選方案的評估權重結果，作為評選之準據。

AHP 法具同時處理質化與量化屬性的優點，且其評估尺度是將人類對事物認知的強弱程度，劃分九尺度加以衡量，雖然 1～9 尺度衡量方式具有簡單之優點，但它不能完全涵蓋人類對事物認知的主觀性及模糊、不確定因素。例如當問題比較複雜、敏感、訊息不完全，決策方案不足以全面反應決策環境，或專家對方案的了解不夠全面、確定，此時人的判斷具有多種可能，無法指出一個確定的數值表示兩兩比較中重要程度的判斷，僅能以語言描述，此時引用模糊層級分析法(FAHP)可將模糊語言表達轉換成模糊尺度資料，較符合現實環境中語意判斷具模糊性之性質。Mon et al.[5]於 1994 提出以 entropy 權重法加以改進，並指出 AHP 法在決策問題評估上有五項缺失：

1. AHP 法主要應用在明確（非模糊）決策上。
2. AHP 法使用不對稱尺度衡量問題。
3. AHP 法不能涵蓋人類對事物認知的不確定因素。
4. AHP 法的排序相當不明確。
5. 決策者主觀的判斷、選擇及偏好對 AHP 法評選的結果有很大的影響；即判斷是錯誤的，決策的結果也是不正確的。

為了克服以上問題，本研究嘗試建構一套評估戰機系統模式，以專家的意見建立所有次項目評判準則的標準，此標準以隸屬函數來代表，當隸屬函數建立後，由戰機系統性能規格資料，可計算出每個評判準則的隸屬值來表示效能分數，使用模糊 AHP 法及決策者主觀權重建立備選方案的評判矩陣，再應用中心點距離法及變異係數的觀念加以排序，得出最適方案，最後以新一代戰機系統評選實例說明評估過程。

現實環境中的許多決策，通常是在模糊情境下進行的，所以傳統的多屬性決策並不能有效處理真實生活中模糊性的問題；因而促使了模糊多屬性決策(Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, FMADM)的發展。最早將模糊集合理論(Fuzzy Set Theory)應用至多屬性決策之研究，是 Bellman 與 Zadeh[7]於 1970 年所發表，最近幾十年來，有關模糊多屬性決策之研究發展迅速，蔚為風氣。

模糊多屬性決策方法基本上區分兩個階段[8, 9]：

階段一：計算每個方案所有屬性的效能分數總值(the Aggregation of the Performance score)。

階段二：按照每個方案的效能分數總值加以排序。

對明確的多屬性決策(MADM)問題來說，效能分數總值是以實數(Real Number)表示，藉由實數的比較，可以很容易將各備選方案加以排序，因此，解決多屬性決策問題的重點集中於第一階段；對模糊多屬性決策問題來說，每個方案的效能分數總值是以模糊數表示，而模糊數排序並不是一項簡單的任務，因此，階段一及階段二對解決模糊多屬性決策問題是非常重要的，也就是說，解決模糊多屬性決策問題，模糊數的運算—計算與比較是一體兩面，不可分割的。

多屬性決策問題，可以 $m\times n$ 的決策矩陣 D 明確表示為

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 A_i 表示方案，$i=1,2,\ldots,m$ 表示方案個數；X_j 表示評估方案所要測量的屬性，$j=1,2,\ldots,n$ 表示每個方案屬性的個數，x_{ij} 表示方案 A_i 在屬性 X_j 的評估效能或比率(performance or rating)。

Hwang 與 Yoon[10](1981)曾對傳統的多屬性決策方法做有系統的整理，特別強調多屬性決策方法的基本觀念，仍廣泛為模糊多屬性決策方法所採用；基於多屬性決策問題之屬性常以語言描述，所以很容易利用模糊集合理論加以擴展及延伸。

二、模糊集及模糊數運算

1965 年美國自動控制學家 Zadeh[3]創立了模糊理論，提供一個描述現實生活中模糊現象的方法。所謂的模糊現象是指客觀事物的差異在中介過渡時所呈現的「亦此亦彼」性。Zadeh 用隸屬程度來描述差異的中間過渡，是用精確的數學語言對模糊性的一種描述。

【定義 2.1】設 U 為一論域(Universe of Discourse)，$\widetilde{A}$ 為 U 的一個模糊子集，若對每個 $x\in U$ 都指定一個數 $\mu_{\widetilde{A}}(x)\in[0,1]$，用它表示 x 對 $\widetilde{A}$ 的隸屬程度，簡稱為 x 的隸屬度，即 $\mu_{\widetilde{A}}(x): U\rightarrow[0,1]$，而 $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 被稱為 $\widetilde{A}$ 的隸屬函數。

【定義 2.2】模糊集合 $\widetilde{A}$ 是論域 U 上的正規(Normal)且凸(Convex)之模糊子集。
「正規」意即：

$$\exists x \in U,\ \mu_{\widetilde{A}}(x)=1 \tag{1}$$

「凸」意即：

$$\forall x_1, x_2 \in U, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq Min(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)) \tag{2}$$

【定義 2.3】正規化且凸集合，並具有區段性連續的隸數函數的模糊集合，稱為模糊數。亦即模糊數需滿足下列條件：
模糊數 $\widetilde{A}$ 為一模糊集，其隸屬函數為 $\mu_{\widetilde{A}}(x): U \to [0,1]$

(1) $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 為區段連續

(2) $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 為一凸模糊集合

(3) $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 為正規化模糊子集，即存在一實數 m，使得 $\mu_{\widetilde{A}}(m)=1$

【定義 2.4】模糊集合 $\widetilde{A}$ 是論域 U 上的 $\alpha-cut$ 之模糊子集，即

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha, x \in U\} \tag{3}$$

α 稱為信心水準(Confidence Level)，$\alpha-cut$ 的主要功用是，它可以從模糊集合中決定一明確集合(Crisp Set)。

【定義 2.5】三角模糊數 $\widetilde{A}$ 定義為一個三元組 (a,b,c)，其隸屬函數定義為

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b \leq x \leq c \\ 0, x \geq c \end{cases} \tag{4}$$

由三角模糊數 $\widetilde{A}$ 之隸屬函數，其 $\alpha-cut$ 定義為

$$\widetilde{A}_\alpha = [a^\alpha, c^\alpha] = [(b-c)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \tag{5}$$

兩三角模糊數 $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3), \widetilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ 的運算法則：

(1) 加法運算 $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$：

$$(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{6}$$

(2) 乘法運算 $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$：

$$(a_1, a_2, a_3) \otimes (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3) \tag{7}$$

其中 $\oplus, \otimes$ 分別表示模糊數加法、乘法的運算子。

三、模糊數排序

模糊數排序對解決模糊多屬性決策問題是非常重要的，想要找出備選方案的最適解，必須倚賴模糊數的排序或比較，許多學者曾就模糊數排序或比較提出方法，依 Chen 與 Hwang[2]歸納整理，排序法區分為四大類：

Type 1：偏好關係(Preference Relation)

(1) 最佳程度值(Degree of Optimality)

(2) 漢明距離(Hamming Distance)

(3) α －cut（α －截集）

(4) 比較函數(Comparison Function)

Type 2：模糊平均數及變異數(Fuzzy Mean and Spread)

機率分配(Probability Distribution)

Type 3：模糊值(Fuzzy Scoring)

(1) 最佳比率(Proportion to Optimal)

(2) 左右值(Left/Right Scores)

(3) 中心點指標(Centroid Index)

(4) 面積測度(Area Measurement)

Type 4：語意表示(Linguistic Expression)

(1) 直覺(Intuition)

(2) 語言變數(Linguistic Approximation)

其中，中心點指標法是由 Yager[13]與 Murakami et al [12]分別提出；模糊平均數及變異數之機率分配則是由 Lee-Li [11]提出的，但上述兩者所建議的方法在應用上都有其限制，本研究將以鄭景俗[6]於 1998 年提出之改良的中心點指標法與變異係數的觀念作為模糊數排序的方法。

3.1 中心點指標法(Centroid Index)

中心點指標法係找出一模糊數 $\tilde{A}$ 的圖形中心點，一圖形中心點在水平軸可對應一 $\bar{x}$ 值，在垂直軸可對應一 $\bar{y}$ 值，模糊數排序可單獨由 $\bar{x}$ 值推導而得，或由 $\bar{x},\bar{y}$ 兩值推導而得；Yager[13]的排序法僅計算 $\bar{x}$ 值，Murakami et al[12]的排序法則計算 $\bar{x},\bar{y}$ 兩值，但 Murakami[12]等的排序法所舉的例子中，所有的 $\bar{y}$ 值皆相同。由此可見，$\bar{x}$ 值似乎是模糊數排序過程中唯一而且重要的指標，但是 Yager[13]與 Murakami et al[12]的方法卻窄化了模糊數排序適用的範圍。我們必須瞭解：評判矩陣所得出來的模糊值，並非都是具有正規化的；也就是說，所有模糊數之 $\bar{y}$ 值不一定皆相等。此外，若所有模糊數之 $\bar{x}$ 值相等或左右開展是相同情況之下，$\bar{y}$ 值就變成模糊數排序很重要的指標。

為了滿足以上的需要，本研究以求出中心點$(\bar{x},\bar{y})$座標值，來計算原點至中心點的距離，作為模糊數排序的依據，方法實施步驟如下，並舉例說明之：

【步驟一】一梯形模糊數表示為 $\tilde{A}=[a,b,c,d;1]$，其隸屬函數可表示為

$$f_{\tilde{A}}=\begin{cases} f_{\tilde{A}}^{L}(x), & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ f_{\tilde{A}}^{R}(x), & c\le x\le d\\ 0, & otherwise\end{cases}\Rightarrow f_{\tilde{A}}=\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ \dfrac{x-d}{c-d}, & c\le x\le d\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{8}$$

其中，$f_{\tilde{A}}^{L}:[a,b]\to[0,1]$, $f_{\tilde{A}}^{R}:[c,d]\to[0,1]$

若 $f_{\tilde{A}}^{L}:[a,b]\to[0,1]$ 為連續且嚴格遞增，其反函數存在，並表示為 $g_{\tilde{A}}^{L}:[0,1]\to[a,b]\Rightarrow g_{\tilde{A}}^{L}=a+(b-a)y$；同樣的，若 $f_{\tilde{A}}^{R}:[c,d]\to[0,1]$ 為連續且嚴格遞減，其反函數存在，並表示為 $g_{\tilde{A}}^{R}:[0,1]\to[c,d]\Rightarrow g_{\tilde{A}}^{R}=d+(c-d)y$。

【步驟二】一模糊數 $\tilde{A}$ 中心點座標 $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 可定義為

$$\bar{x}_0\left(\widetilde{A}\right)=\frac{\int_a^b\left(xf_{\widetilde{A}}^L\right)dx+\int_b^c xdx+\int_c^d\left(xf_{\widetilde{A}}^R\right)dx}{\int_a^b\left(f_{\widetilde{A}}^L\right)dx+\int_b^c dx+\int_c^d\left(f_{\widetilde{A}}^R\right)dx} \tag{9}$$

$$\bar{y}_0\left(\widetilde{A}\right)=\frac{\int_0^1\left(yg_{\widetilde{A}}^L\right)dy+\int_0^1\left(yg_{\widetilde{A}}^R\right)dy}{\int_0^1\left(g_{\widetilde{A}}^L\right)dy+\int_0^1\left(g_{\widetilde{A}}^R\right)dy} \tag{10}$$

其中，指標$\bar{x}_0$與 Murakami et al[12]之$\bar{x}_0$相同的，我們可以利用 Mathcad 或 Mathematica 套裝軟體計算中心點$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$座標值。

【步驟三】計算排序函數，求出原點至中心點之距離，即

$$R\left(\widetilde{A}\right)=\sqrt{(\bar{x}_0)^2+(\bar{y}_0)^2} \tag{11}$$

【步驟四】模糊數排序：對任何模糊數$\widetilde{A}_i$，$\widetilde{A}_i\in X$，$X=\{\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n\}$是凸模糊數集合，則模糊數排序具有下列特質：

(1)若$R(\widetilde{A}_i)<R(\widetilde{A}_j)$，則$\widetilde{A}_i<\widetilde{A}_j$

(2)若$R(\widetilde{A}_i)=R(\widetilde{A}_j)$，則$\widetilde{A}_i=\widetilde{A}_j$

(3)若$R(\widetilde{A}_i)>R(\widetilde{A}_j)$，則$\widetilde{A}_i>\widetilde{A}_j$

例一：圖 1 有兩個三角模糊數及三個梯形模糊數，分別為$\widetilde{A}_1=(3,5,7;1)$，$\widetilde{A}_2=(3,5,7;0.8)$，$\widetilde{B}_1=(5,7,9,10;1)$，$\widetilde{B}_2=(6,7,9,10:0.6)$，$\widetilde{B}_3=(7,8,9,10;0.4)$，其隸屬函數如下：

$$f_{\widetilde{A}_1}=\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}, & 3\le x<5\\ 1, & x=5\\ \dfrac{7-x}{2}, & 5<x\le 7\end{cases}\qquad f_{\widetilde{A}_2}=\begin{cases}0.8\dfrac{x-3}{2}, & 3\le x<5\\ 0.8, & x=5\\ 0.8\dfrac{7-x}{3}, & 5<x\le 7\end{cases}$$

$$f_{\widetilde{B}_1}=\begin{cases}\dfrac{x-5}{2}, & 5\le x<7\\ 1, & 7\le x\le 9\\ \dfrac{10-x}{1}, & 9<x\le 10\end{cases}\qquad f_{\widetilde{B}_2}=\begin{cases}0.6\dfrac{x-6}{1}, & 6\le x<7\\ 0.6, & 7\le x\le 9\\ 0.6\dfrac{10-x}{1}, & 9<x\le 10\end{cases}$$

$$f_{\widetilde{B}_3}=\begin{cases}0.4\dfrac{x-7}{1}, & 7\le x<8\\ 0.4, & 8\le x\le 9\\ 0.4\dfrac{0.5-x}{0.2}, & 9<x\le 10\end{cases}$$

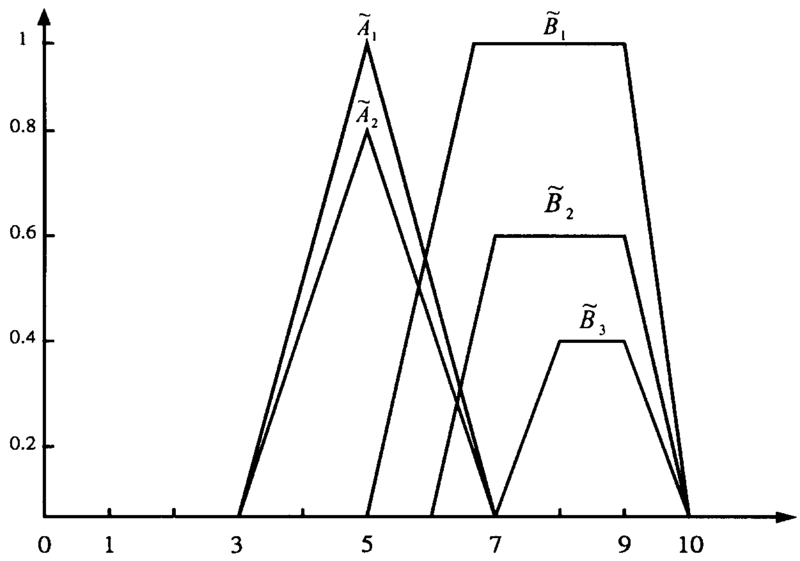

圖 1　模糊數 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3$

由中心點指標法步驟一，可以導出 $f^L_{\widetilde{A}_i}, f^R_{\widetilde{A}_i}$ 及 $f^L_{\widetilde{B}_i}, f^R_{\widetilde{B}_i}$ 之反函數如表 1，由(8)、(9)式及表 1，可以計算出最後結果如表 2，從表 2 數據，模糊數次序為 $\widetilde{A}_2 < \widetilde{A}_1 < \widetilde{B}_1 < \widetilde{B}_2 < \widetilde{B}_3$。本例摘自 Liou-Wang[14]方法中所舉之例題，在該例題中，$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$，但本研究運用改良之中心點指標法能區分 $\widetilde{A}_1$ 與 $\widetilde{A}_2$ 之次序。

表 1　$f^L_{\widetilde{A}_i}, f^R_{\widetilde{A}_i}$ 及 $f^L_{\widetilde{B}_i}, f^R_{\widetilde{B}_i}$ 之反函數

	$g^L_{\widetilde{A}_i}, g^L_{\widetilde{B}_i}$	$g^R_{\widetilde{A}_i}, g^R_{\widetilde{B}_i}$
$\widetilde{A}_1$	$3+2y$	$7-2y$
$\widetilde{A}_2$	$3+2/0.8y$	$7-2/0.8y$
$\widetilde{B}_1$	$5+2y$	$10-y$
$\widetilde{B}_2$	$6+1/0.6y$	$10-1/0.6y$
$\widetilde{B}_3$	$7+1/0.4y$	$10-1/0.4y$

表 2　中心點座標 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 及 $R(\widetilde{X}) = \sqrt{(\bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_i)^2}$

	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$R(\widetilde{X}) = \sqrt{(\bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_i)^2}$
$\widetilde{A}_1$	5	0.5	5.03
$\widetilde{A}_2$	5	0.4	5.02
$\widetilde{B}_1$	7.714	0.505	7.73
$\widetilde{B}_2$	8	0.3	8.01
$\widetilde{B}_3$	8.5	0.2	8.50

3.2 Lee-Li 排序法

Lee-Li 於 1988 年提出以模糊事件機率測量求算平均數及標準差的方法來實施模糊數排序。此方法有一項前題：即相對於各模糊數而言，若一模糊數有較高的平均數及較低的標準差，則直覺認為其排序較高。所以，平均數及標準差可以用來比較模糊數的大小。

此方法假設模糊事件的機率分配有二種形式：

Types 1：均等分配(Uniform Distribution)：

$f(\tilde{A})=\frac{1}{|\tilde{A}|}$，且 $\tilde{A}\in U$，其平均數及標準差定義為

$$\bar{x}_U(\tilde{A})=\int_{S(\tilde{A})} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx \Big/ \int_{S(\tilde{A})}\mu_{\tilde{A}}(x)dx \tag{12}$$

$$\sigma_U(\tilde{A})=\left[\left(\int_{S(\tilde{A})} x^2\mu_{\tilde{A}}(x)dx \Big/ \int_{S(\tilde{A})}\mu_{\tilde{A}}(x)dx\right)-\left(\bar{x}_U(\tilde{A})\right)^2\right]^{1/2} \tag{13}$$

其中，$S(\tilde{A})$ 表示模糊數 $\tilde{A}$ 之支集(Support)。

若模糊數 $\tilde{A}$ 為三角形模糊數，則上式可簡化為

$$\bar{x}_U(\tilde{A})=\frac{1}{3}(l+m+n) \tag{14}$$

$$\sigma_U(\tilde{A})=\frac{1}{18}\left(l^2+m^2+n^2-lm-\ln-mn\right) \tag{15}$$

其中，$l=\inf S(\tilde{A}), \mu_{\tilde{A}}=1, n=\sup S(\tilde{A})$。

Types 2：比率分配(Proportional Distribution)：

$f(\tilde{A})=k\mu_{\tilde{A}}(x), \tilde{A}\in U, k$ 為比例常數，其平均數及標準差為

$$\bar{x}_P(\tilde{A})=\int_{S(\tilde{A})} x^2\mu_{\tilde{A}}(x)dx \Big/ \int_{S(\tilde{A})}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^2dx \tag{16}$$

$$\sigma_P(\tilde{A})=\left[\left(\int_{S(\tilde{A})} x^2\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^2dx \Big/ \int_{S(\tilde{A})}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^2dx\right)-\left(\bar{x}_P(\tilde{A})\right)^2\right]^{1/2} \tag{17}$$

若模糊數 $\tilde{A}$ 為三角形模糊數，則上式可簡化為

$$\bar{x}_P(\tilde{A})=\frac{1}{4}(l+2m+n) \tag{18}$$

$$\sigma_P(\tilde{A})=\frac{1}{80}\left(3l^2+4m^2+3n^2-4lm-2\ln-4mn\right) \tag{19}$$

各模糊數 $\tilde{A}$ 求算其平均數及標準差後，比較各模糊數大小的方式為：

(1) $\bar{x}(\tilde{A}_i)>\bar{x}(\tilde{A}_j)\Rightarrow \tilde{A}_i>\tilde{A}_j$

(2) $\bar{x}(\tilde{A}_i)=\bar{x}(\tilde{A}_j), \sigma(\tilde{A}_i)<\sigma(\tilde{A}_j)\Rightarrow \tilde{A}_i>\tilde{A}_j$

3.3 變異係數指標法(The Index of Coefficient of Variation)

從統計的觀點，平均數及標準差是不能分開且單獨作為兩個模糊數比較的基礎，此外，依照 Lee-Li 的方法，一模糊數有較高的平均數及較低的標準差，則認為其排序較高，然而，當有較高的平均數及較高的標準差，或有較低的平均數及較低的標準差之情況時，要比較模糊數之次序並不容易。因此，本研究利用變異係數來改進 Lee-Li 的方法。

變異係數是一種相對分散程度的測量，它是以標準差除以平均數，以符號CV表示如下[1]：

$$\text{變異係數}(CV)=\text{標準差}(\sigma)／\text{平均數}(\mu) \tag{20}$$

其中 $\mu \neq 0, \sigma > 0$

利用變異係數指標法比較模糊數，首先須以 Lee-Li 方法計算出平均數及標準值，最後求出變異係數值加以比較，變異係數值較小的模糊數，其排序較高。舉例說明之。

例二：圖 2 有二個三角模糊數$\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2$，其隸數函數如下：

$$f_{\widetilde{U}_1}=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad f_{\widetilde{U}_2}=\begin{cases} \frac{1}{4}(5x-1), & \frac{1}{5} \le x \le 1 \\ \frac{1}{3}(7-4x), & 1 \le x \le \frac{4}{7} \end{cases}$$

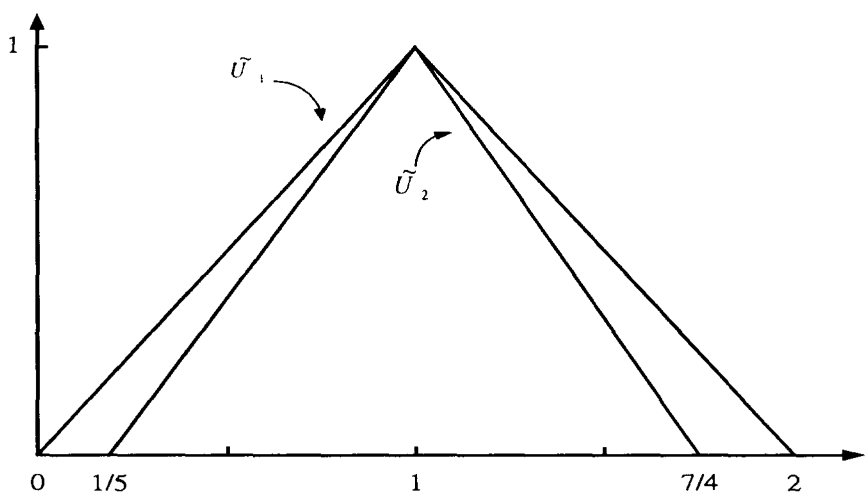

圖 2　模糊數$\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2$

由(12)－(20)式，可以計算出平均數$\bar{x}$、標準差σ及變異係數CV如表 3，根據表 3 資料得知，由平均數評判出來的次序為$\widetilde{U}_1 > \widetilde{U}_2$，由標準差$\sigma$評判出來次序也是$\widetilde{U}_1 > \widetilde{U}_2$，但 Lee-Li 法的評判準則是具有較高的平均數及較低的標準差，其排序較高。很顯然地，本例題無法使用 Lee-Li 法來比較次序，因此，本研究可以變異係數CV來改進 Lee-Li 法的缺點。由表 3 變異係數CV值很容易判斷出次序，CV值愈小，次序愈高，因此，$\widetilde{U}_1 < \widetilde{U}_2$。

表 3　模糊數 $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ 之平均數 $\bar{x}$ 、標準差 σ 及變異係數 CV

	Uniform distribution			Proportional distribution		
	$\bar{x}$	σ	CV	$\bar{x}$	σ	CV
$\widetilde{U}_1$	1	0.1667	0.1667	1	0.1	0.1
$\widetilde{U}_2$	0.9833	0.1001	0.1008	0.9875	0.0563	0.0571

四、評估方法及演算

武器系統的評估屬於多屬性決策問題，其中牽涉的因素複雜而廣泛，而且因素之間往往互相衝突、矛盾；一般來說，武器系統評估通常具有質化與量化兩種資料，量化的資料來自武器系統的規格數據，質化的資料則主要來自決策者與專家的意見或經驗；決策者與專家的意見或經驗屬語言變量，為便於評估比較，須將語言變量以量化方式處理。本研究採用 Saaty 層級分析法(AHP)九尺度衡量的觀念為基礎，將決策者與專家的語言變量以三角模糊數 $\tilde{1} \sim \tilde{9}$ 來表示不同的主觀強度，改進傳統 AHP 法衡量尺度不平衡之現象，使評估過程更平滑。本研究將九尺度重新定義如表 4，並定義對稱三角形模糊數 $\tilde{1} \sim \tilde{9}$ 之特徵函數如表 5 所示。

表 4　重要性強度所對應之模糊數

重要性的強度	定義
$\tilde{1}$	稍為重要
$\tilde{3}$	有些重要
$\tilde{5}$	重要
$\tilde{7}$	非常重要
$\tilde{9}$	絕對重要
$\tilde{2},\tilde{4},\tilde{6},\tilde{8}$	在上述兩判斷尺度之間

表 5　三角模糊數之特徵函數

模糊數	特徵（或隸屬）函數
$\tilde{1}$	(1,1,3)
$\tilde{x}$	$(x-2, x, x+2) for x = 2,3,4,5,6,7,8$
$\tilde{9}$	(7,9,9)

本研究評估方法並不是直接採用 FAHP 的因素間兩兩比較來建立模糊評判矩陣（模糊兩兩比較矩陣），而是比較各屬性效能總分，並利用模糊數 $\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7},\tilde{9}$ 來表示，得到各屬性的模糊評判向量（如第五節實例分析步驟三），將各屬性的模糊評判向量組合成總模糊評判矩陣。簡易實施步驟如下：

1. 建立系統的評估層級結構模式
2. 建立各屬性與次準則的相對性能需求隸屬函數
3. 以決策者的意見建立模糊主觀權重向量 $\widetilde{W}$
4. 比較效能分數建立模糊評判矩陣
5. 模糊數排序
6. 依隸屬函數算出此諸元的隸屬程度，即隸屬值或效能分數

針對上述的實施步驟，下面以評估新一代戰機說明如下：

【步驟一】建立戰機系統的評估層級結構模式

經徵詢專家（空總決策相關單位、飛行員、軍事評論家）意見及參考國內外資料，列出評判準則有 1.戰術性 2.技術性 3.經濟性 4.維護性 5.先進性等五項，以層級結構方式建立評估模式如圖 4。

【步驟二】建立評判準則的隸屬函數

為符合國內環境、使用者需求、及戰術考量，首先建立各屬性與次準則的相對性能需求隸屬函數（如表 6）。例如，最大推力的理想範圍為 $x \geq 17000$，藉由專家的經驗，我們可以根據這個資料建立最大推力評判準則的隸屬函數，即

$$\mu_1 = \begin{cases} (x-15000)/2000, 15000 \leq x \leq 17000 \\ 1, \quad x \geq 17000 \end{cases}$$

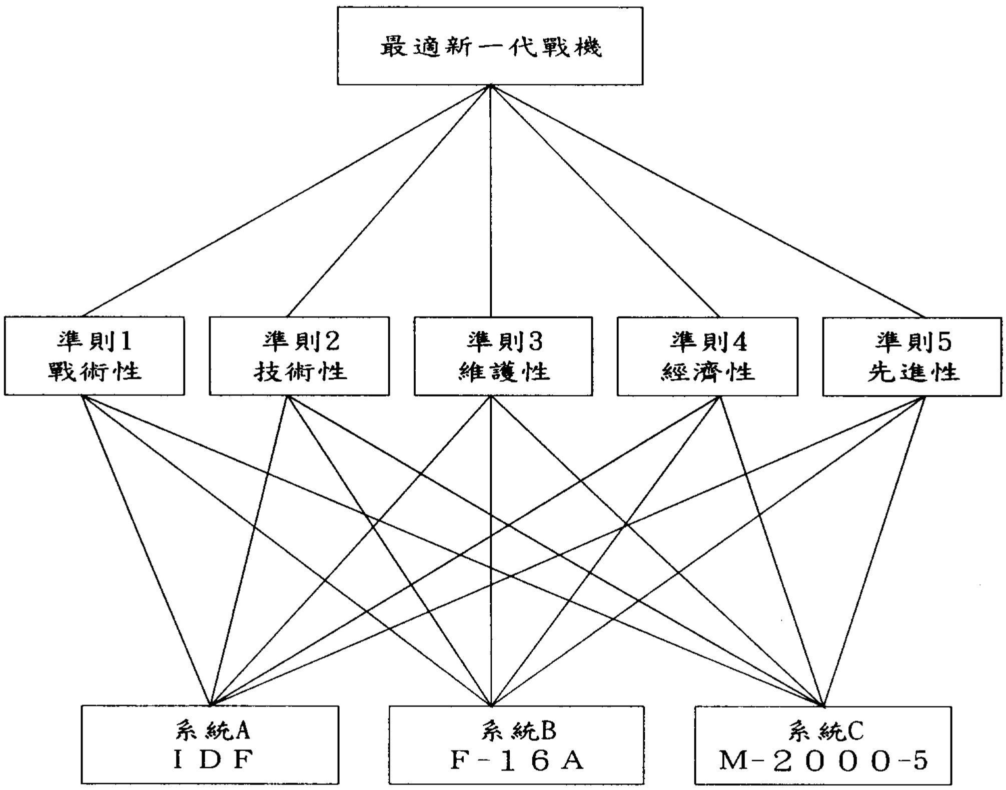

圖 3　最適新一代戰績評估層級結構模式

【步驟三】計算效能分數

由戰機系統性能規格資料，請專家基於國內環境、使用者需求、及戰術考量建立相對的性能需求隸屬函數，再依隸屬函數算出此諸元的隸屬程度，即隸屬值或效能分數 g_i，例如最大推力之效能分數 g_i 求算如下：

$$\mu_1 = \begin{cases} (x-15000)/2000, 15000 \leq x \leq 17000 \\ 1, \quad x \geq 17000 \end{cases}, \; x = 16700 \Rightarrow g_i = 0.85$$

其中，x 為戰機性能諸元資料。

因此不具模糊性的資料，也應依上述的性能需求模糊隸屬函數求其轉換的隸屬度，即隸屬值或效能分數 g_i。

在計算屬性效能總分時，為方便與易算，本文假設各屬性的次準則間具有獨立性、及均等權重來求其屬性的總分（若非均等權重則需先決定各屬性的次準則權重再計算加權平均），所以直接將各屬性的次準則依轉換求得的隸屬度直接相加，得到各方案在該屬性的總分。

【步驟四】以決策者的意見建立模糊主觀權重向量$\widetilde{W}$

通常若超過一位決策者可依不同決策者定出決策者的影響權重來處理，或以每位決策者均具相同權重求其平均權重。本研究採用多位決策者根據作戰需求、專業素養及時空環境等因素，以模糊數$\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7},\tilde{9}$主觀給定五個準則權重後，以平均數法求得五個準則權重值。

【步驟五】比較效能分數建立模糊評判矩陣

(1)為了比較效能分數，我們利用對稱三角形模糊數$\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7},\tilde{9}$來表示層級評判矩陣中兩元素相對的強度。

(2)為了建立總模糊評判矩陣$\widetilde{A}$，我們利用模糊評判矩陣$\widetilde{X}$乘以步驟三之模糊主觀權重向量$\widetilde{W}$，得出整合模糊數。

$$\widetilde{A}=\widetilde{X}\otimes\widetilde{W}^{T}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n}\\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\tilde{w}_1\\ \tilde{w}_2\\ \vdots\\ \tilde{w}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\\ \vdots\\ \tilde{a}_m\end{bmatrix} \tag{21}$$

【步驟六】模糊數排序

將整合運算結果$\left[\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots\tilde{a}_m\right]$進行模糊數排序。本研究使用中心點及變異係數指標法實施模糊數排序，以求出最適之戰機系統。

表 6　三個戰機系統性能諸元資料及評判準則（隸屬函數）

	項目	IDF	F-16A	M-2000-5	隸屬函數
1	最大推力（磅）	8350 ×2	23770	21385	$\mu_1=\begin{cases}(x-15000)/2000, & 15000\le x\le 17000\\ 1, & x\ge 17000\end{cases}$
2	推重比值	1.1	1.1	0.9	$\mu_2=\begin{cases}(x-0.8)/0.2, & 0.8\le x\le 1.0\\ 1, & x\ge 1.0\end{cases}$
3	最大速度(馬赫)	1.68	2.05	2.3	$\mu_3=\begin{cases}(x-1.5)/0.3, & 1.5\le x\le 1.8\\ 1, & x\ge 2.0\end{cases}$
4	升限（呎）	54000	55000	60000	$\mu_4=\begin{cases}(x-50000)/10000, & 50000\le x\le 60000\\ 1, & x\ge 60000\end{cases}$
5	翼負荷（磅/平方呎）	88	95	85	$\mu_5=\begin{cases}1, & x\le 90\\ (100-x)/10, & 90\le x\le 100\end{cases}$
6	最大 G 力限制	9	9	9	$\mu_6=\begin{cases}(x-5)/5, & 5\le x\le 10\\ 1, & x\ge 10\end{cases}$
7	作戰半徑（浬）	680	710	700	$\mu_7=\begin{cases}(x-500)/250, & 500\le x\le 750\\ 1, & x\ge 750\end{cases}$
8	爬升率（呎/分）	53000	62000	48000	$\mu_8=\begin{cases}(x-40000)/15000, & 40000\le x\le 55000\\ 1, & x\ge 55000\end{cases}$
9	飛機尺寸（翼展、機長、機高）	28.3、46.7、15.6	32.8、49.3、16.7	30、47、17	標準規格為 29、47、16
10	可靠度(%)	99.16	97.33	98.33	$\mu_{110}=\begin{cases}(x-95)/4, & 95\le x\le 99\\ 1, & x\ge 99\end{cases}$
11	系統成本(億元)	8	10	24	$\mu_{11}=\begin{cases}1, & x\le 15\\ (30-x)/15, & 15\le x\le 30\end{cases}$
12	系統壽限(小時)	8000	8000	8000	$\mu_{12}=\{1-\exp(-x/8500), \quad x\ge 0\}$

表 7　戰機其它性能與專家意見（以模糊語意表示）

	項目	IDF	F-16A	M-2000-5
1	空用雷達	非常好	好	非常好
2	武器配備	非常好	好	非常好
3	座艙視野	非常好	非常好	好
4	反干擾能力	普通	好	好
5	作戰能力	好	很好	非常好
6	後勤維修成本	低	高	非常高
7	作業環境建置需求	容易	高	高
8	維修零件來源	容易	難	難
9	系統標準化	好	好	非常好
10	人員訓練	容易	難	難
11	隱匿性	好	非常好	非常好
12	機動性	普通	高	高
13	系統模組化	非常好	好	非常好

五、實例分析

本研究以模糊層級分析架構觀念為基礎，並用中心點及變異係數兩種指標法實施模糊數排序，評選出最適方案，其步驟實施如下：

【步驟一】建立戰機系統的評估層級結構模式（如圖 3）
【步驟二】建立評判準則的隸屬函數（如表 6）
【步驟三】計算效能分數，並求出各準則模糊評判向量

利用表 6 戰機系統性能規格資料及根據專家的意見所建立的隸屬函數，可以算出評估模式各準則之效能分數：

(1) 戰術性：戰術性之屬性及效能分數如表 8 所示。

表 8　戰術性之屬性及效能分數

戰術性	A	B	C
最大推力	0.85	1	1
推重比值	1	1	0.5
最大速度	0.6	1	1
升限	0.44	0.55	0.9
翼負荷	1	0.5	1
最大 G 力限制	0.8	0.8	0.8
作戰半徑	0.72	0.84	0.8
爬升率	0.86	1	0.53
空用雷達	1	0.7	1
武器配備	1	0.7	1
總分	8.27	8.09	8.53

由表 8 戰術性之屬性總分，決策者可以做出判斷，得到一模糊評判向量

$C_1 = [8.27 \quad 8.09 \quad 8.53] \Rightarrow C_1 = [\tilde{7} \quad \tilde{5} \quad \tilde{9}]$

(2) 技術性：技術性之屬性及效能分數如表 9 所示。

表 9　技術性之屬性及效能分數

技術性	A	B	C
飛機規格	0.8	0.75	0.85
座艙視野	1	1	0.7
可靠度	1	0.58	0.83
反干擾能力	0.5	0.7	0.7
作戰能力	0.7	0.85	1
總分	4	3.88	4.08

由表 9 技術性之屬性總分，可得到一模糊評判向量

$C_2 = [4 \quad 3.88 \quad 4.08] \Rightarrow C_2 = [\tilde{5} \quad \tilde{3} \quad \tilde{7}]$

(3) 經濟性：經濟性之屬性及效能分數如表 10 所示。

表 10　經濟性之屬性及效能分數

經濟性	A	B	C
系統成本	1	1	0.4
系統壽限	0.6	0.6	0.6
後勤維修成本	1	0.7	0.5
總分	2.6	2.3	1.5

由表 10 經濟性之屬性總分，可得到一模糊評判向量

$C_3 = [2.6 \quad 2.3 \quad 1.5] \Rightarrow C_3 = [\tilde{9} \quad \tilde{7} \quad \tilde{1}]$

(4) 維護性：維護性之屬性及效能分數如表 11 所示。

表 11　維護性之屬性及效能分數

維護性	A	B	C
作業環境建置需求	0.7	0.5	0.5
維修零附件來源	0.7	0.5	0.5
系統標準化	0.7	0.7	1
人員訓練	0.7	0.5	0.5
總分	2.8	2.2	2.5

由表 11 維護性之屬性總分，可得到一模糊評判向量

$C_4 = [2.8 \quad 2.2 \quad 2.5] \Rightarrow C_4 = [\tilde{7} \quad \tilde{3} \quad \tilde{5}]$

(5) 先進性：先進性之屬性及效能分數如表 12 所示。

表 12　先進性之屬性及效能分數

先進性	A	B	C
隱匿性	0.7	1	1
機動性	0.5	0.7	0.7
系統模組化	1	0.7	1
總分	2.2	2.4	2.7

由表 12 先進性之屬性總分，可得到一模糊評判向量

$C_5 = [2.2 \quad 2.4 \quad 2.7] \Rightarrow C_5 = [\tilde{5} \quad \tilde{7} \quad \tilde{9}]$

【步驟四】建立評判準則的權重值

多位決策者根據作戰需求、專業素養及時空環境等因素，以模糊數$\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7},\tilde{9}$主觀賦予各準則權重值，並以每位決策者均具相同重要性求其平均權重。得出五個準則權重如下；

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \tilde{9} & \tilde{3} & \tilde{5} & \tilde{1} & \tilde{7} \end{bmatrix}$$

【步驟五】建立總模糊評判矩陣

利用(21)式將模糊評判矩陣$\widetilde{X}$乘以模糊權重向量$\widetilde{W}$，即可得總模糊評判矩陣$\widetilde{A}$。

$$\widetilde{A}=\widetilde{X}\otimes\widetilde{W}^T=\begin{bmatrix}\widetilde{7}&\widetilde{5}&\widetilde{9}&\widetilde{7}&\widetilde{5}\\\widetilde{5}&\widetilde{3}&\widetilde{7}&\widetilde{3}&\widetilde{7}\\\widetilde{9}&\widetilde{7}&\widetilde{1}&\widetilde{5}&\widetilde{9}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\widetilde{9}\\\widetilde{3}\\\widetilde{5}\\\widetilde{1}\\\widetilde{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{a}_1\\\widetilde{a}_2\\\widetilde{a}_3\end{bmatrix}$$

$\widetilde{a}_1(A)=(79,\ 165,\ 269)$
$\widetilde{a}_2(B)=(63,\ 141,\ 229)$
$\widetilde{a}_3(C)=(95,\ 175,\ 249)$

戰機系統 A,B,C 之三角模糊數如圖 4。

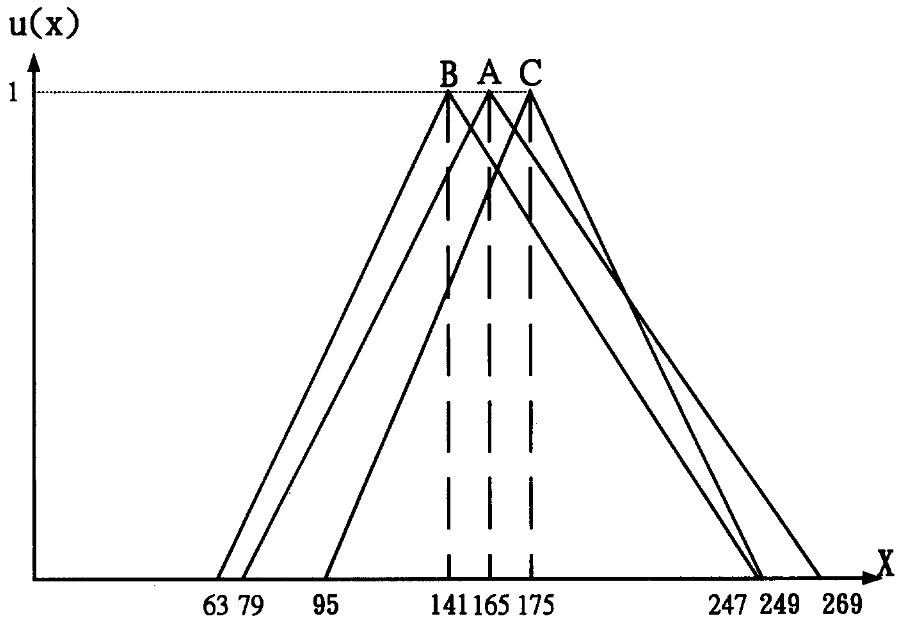

圖 5 戰機系統 A,B,C 之三角模糊數

【步驟六】實施模糊數排序，評選出最適方案

排序結果以中心點指標法、變異係數指標法、Murakami et al 與 Yager、Lee-Li 法相互比較，其計算結果如表 13。

表 13 模糊數排序四種方法結果比較表

方案	中心點指標法 $R(\widetilde{U}_i)$	變異係數指標法 $\sigma/\bar{x}$		Murakami et al 法 Yager 法		Lee-Li 法			
						Uniform distribution		Proportional distribution	
		U.D.	P.D.	$\bar{x}_0$	$\bar{y}_0$	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$	σ
$\widetilde{a}_1(A)$	171.001	8.825	5.348	171	0.496	171	1509	169.5	906.55
$\widetilde{a}_2(B)$	150.334	9.459	5.785	150.333	0.492	150.333	1422	148	856.2
$\widetilde{a}_3(C)$	173.001	5.715	3.42	173	0.501	173	988.667	173.5	593.35

由表 13 得知：排序結果均為 C＞A＞B，故方案 C 是最適方案。

六、結論

1. 多屬性決策分析中所需要效能分數，通常是由專家所給予的，而本研究提出的評估模式中，效能分數是以戰機系統的性能規格資料建立屬性的隸屬函數，並據以計算隸屬值來代替效能分數，能充份反映每個評選方案的特性，使評估的結果更精確。
2. 實例分析中，以模糊尺度表示戰機系統的效能分數及決策者的權重值，可改進傳統 AHP 法，使整個評估模式更具彈性，能配合決策者評選武器系統時所表現的主觀及偏好。
3. 採用中心點指標法及變異係數指標法來實施模糊數排序，可分別改進 Yager、Murakami et al、Lee-Li 方法適用窄化的問題。
4. AHP 法具同時處理質化與量化屬性的優點，及將人類對事物認知的強弱程度，劃分九尺度加以衡量具有簡單之優點，但它不能完全涵蓋人類對事物認知的主觀性及模糊、不確定因素。在實際問題中，判斷的不確定及用語言描述是經常出現的，因此本研究引用模糊理論將模糊語言表達轉換成模糊尺度資料，較符合現實環境中語意判斷具模糊性之性質，建構一套評估戰機系統模式。
5. 本研究方法並不直接採用 FAHP 的因素間兩兩比較來建立模糊兩兩比較矩陣(倒數且對角線上值為 1 矩陣)；而是比較各屬性效能總分，並利用模糊數$\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7},\tilde{9}$來表示，得到各屬性的模糊評判向量，再將各屬性的模糊評判向量組合成總模糊評判矩陣，因此本研究方法徹底解決了(避開) Mon et al.[5]於 1994 指出 AHP 法在決策問題評估上有五項缺失中的三點：
   (1) AHP 法主要應用在明確（非模糊）決策上。
   (2) AHP 法使用不對稱尺度衡量問題。
   (3) AHP 法不能涵蓋人類對事物認知的不確定因素。

參考文獻

1. 林惠玲、陳正倉，*應用統計學*，華泰書局(1999)。
2. Chen, S.J. and C.L., Hwang, "Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications," *Lecture Notes in Economics and Mathematical System*, Springer-Verlag, New York(1992).
3. Zadeh, L.A., "Information and Control," *Fuzzy Set*, 8, 338-353(1965).
4. Saaty, T.L., *The Analytic Hierarchy Process*, McGrawHill, New York(1980).
5. Mon, D.L., Cheng C. H. and Lin J. C., "Evaluating Weapon System Using Fuzzy Analytic Hierarchy Process Based on Entropy Weight," *Fuzzy Sets and Systems*, 62, 127-134(1994).
6. Cheng, C.H., "A New Approach for Fuzzy Numbers by Distance Method," *Fuzzy Sets and Systems*, 95, 307-317(1998).
7. Bellman, R. and L.A., Zadeh, "Decision Making in a Fuzzy Environment," *Management Science*, 17B(4), 141-164(1970).
8. Dubois, D. and H., Prade, *Fuzzy Sets and Systems：Theory and Applications, Academic Press*, New York(1980).
9. Zimmermann H.J., *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert System*, Boston(1987).
10. Hwang, C.L. and K., Yoon, *Multiple Attribute Decision Making-Method and Applications, A State-of-Art Survey*, Springer-Verlag, New York(1981).
11. Lee, E.S. and R.L., Li, "Comparision of Fuzzy Numbers Based on the Probability Measure of Fuzzy Events," *Computer and Mathematics with Applications*,

15, .887-896(1988).
12. Murakami, S., Maeda, S. and S., Imamura, "Fuzzy Decision Analysis on the Development of Centralized Regional Energy Control System," *IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation Decision Analysis*, 363-368(1983).
13. Yager R.R., "On a General Class of Fuzzy Connectives," *Fuzzy Sets and Systems*, 4, 235-242(1980).
14. Liou, T.S. and M.J.J., Wang, "Ranking Fuzzy Numbers with Integral Value," *Fuzzy Sets and Systems*, 50, 247-255(1992).